

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E
MATEMÁTICA

ODENISE MARIA BEZERRA

INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA:
Avaliação de duas experiências

NATAL - RN
2008

ODENISE MARIA BEZERRA

INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA:

Avaliação de duas experiências

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientador:

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

NATAL - RN

2008

Divisão de Serviços Técnicos

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Bezerra, Odenise Maria.

Investigação histórica nas aulas de matemática: avaliação de duas experiências / Odenise Maria Bezerra. – Natal, RN, 2008.
123 f.

Orientador: Iran Abreu Mendes.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

1. Educação matemática – Dissertação. 2. História da matemática – Dissertação. 3. Investigação – Dissertação. 4. Equação do 2º grau – Dissertação. 5. Matemática – Licenciatura – Dissertação. I. Mendes, Iran Abreu. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 372.851(043.3)

ODENISE MARIA BEZERRA

INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA:

Avaliação de duas experiências

Aprovado em: ____/____/____

Banca Examinadora

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Orientador

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra
Universidade Federal do Tocantins - UFT
Examinador externo

Prof. Dr. Paulo César de Faria
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Examinador interno

Prof. Dr. John A. Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Suplente

Dedico este estudo para:

- meu filho, Guilherme Leão Bezerra, pela alegria de tê-lo como filho e pelo seu amor,
me fortalecendo em cada momento;
- meu marido, José Querginaldo Bezerra, pelo apoio e compreensão em todas as fases
deste estudo e principalmente pela presença constante em todos os momentos de
dificuldade e de felicidade vividos;
- meus pais, José Leão Bezerra e Maria do
Rosário de Fátima Bezerra, a quem agradeço
pelo apoio e confiança, me ensinando
sempre o valor do estudo e da
responsabilidade.

AGRADECIMENTOS

Ao longo deste estudo, contei com a ajuda, conhecimento, incentivo e amizade de muitas pessoas. Foram momentos compartilhados com muito sacrifício, alegria e muito cansaço. Em especial agradeço:

- A Deus que iluminou o meu caminho em toda essa trajetória;
- Aos meus familiares, pelo apoio e compreensão nos momentos em que precisei me ausentar de seu convívio, para dedicar-me a este estudo;
- Ao meu orientador, professor Iran Abreu Mendes, pelo incentivo e apoio durante todo o processo de construção deste estudo, pelos questionamentos, sugestões e caminhos apontados, e principalmente pela confiança e amizade;
- Ao “meu” grupo de estudo maravilhoso que tive o privilégio de coordenar , composto pelas alunas: Amanda Torres, Juliana de Melo, Maridélia Soares e Suzi Costa, pela colaboração, paciência e apoio em todos os momentos deste estudo;
- A todos os professores do PPGECONM, em especial aos professores Paulo César de Faria, John Andrew Fossa e Bernadete Barbosa Morey pela prazerosa receptividade e participação no meu crescimento e amadurecimento;
- Ao Município de São Gonçalo do Amarante-RN, em especial a Marta Bezerra Rodrigues e Francisco Potiguar Cavalcanti Junior, pelo incentivo e apoio;
- A Nízia Maria de Lima, Iguaracy Medeiros dos Santos e Albimar Gonçalves de Mello pelo carinho e pronto atendimento nas inúmeras vezes que pedi ajuda;
- A Carlos Aldemir Farias e Maria Marluce de Paula Araújo pela amizade e competência na revisão do texto deste estudo;

– A Rafael Montoito, pelo incentivo nos momentos que comentamos versões preliminares e finais deste estudo, mas principalmente pela nossa saudável amizade;

– A Sônia Maria Cavalcanti da Rocha, pelo apoio cognitivo e amizade em todos os momentos de angústias e alegrias;

– A Cristina Bezerra, Érika Betânia, Gabriela Lucheze, Ilma Diniz, Cleniete Nascimento, Oderize Bezerra, Odjane Bezerra e Viviane Simioli pelo carinho que destinaram a mim e ao meu filho nos momentos de minhas freqüentes ausências;

– A CAPES, pela concessão da minha bolsa de estudo;

– Aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, em especial aos meus alunos da disciplina Estágio supervisionado, que participaram deste estudo, pela oportunidade que nos deram para a realização da mesma;

Por fim, agradeço a todos que, de perto ou de longe, torceram pelo meu sucesso, compartilhando comigo cada momento desta jornada.

RESUMO

O presente estudo reflete sobre alguns aspectos processuais acerca do desenvolvimento da aprendizagem matemática a partir da experiência com atividades investigativas, acerca da resolução de equação do 2º grau, na qual foi testada uma proposta de ensino, apoiada no uso de textos em história da matemática. A pesquisa foi realizada em duas etapas, tendo a primeira servido de base para a segunda, a qual foi realizada com um grupo de estudo remanescente da primeira experiência. A intenção foi investigar como o grupo participante, denominado como grupo de estudo, envolveu-se na realização de atividades de investigação em matemática, apoiada no uso da história da matemática. Com base nos resultados alcançados no decorrer do estudo, foi possível compreender que as atividades de investigação possibilitam o desenvolvimento dos alunos, alcance de aprendizagem matemática e o desenvolvimento de habilidades e competências para a investigação como veículo de construção do seu conhecimento matemático. Essa proposta de abordagem investigativa para a sala de aula é importante, tanto para futuros professores de matemática quanto para estudantes de ensino fundamental e implicará numa nova fase para a educação matemática que chegará às escolas.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Atividades de Investigação. História da Matemática. Equação do 2º grau. Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

This study reflects on some procedural aspects about the development of mathematics learning from the experience with investigative activities concerning the resolution of second degree equation, which was tested a proposal for education, supported the use of texts in history of mathematics. The survey was conducted in two stages, taking the first-served basis for the second, which was carried out with a study group remainder of the first experiment. The intention was to investigate how the group participant, known as the study group, involved in the implementation of activities of research in mathematics, supported the use of the history of mathematics. Based on the results achieved during the study, it was possible to understand that the activities of research enable the development of students, range of learning mathematics and the development of skills and expertise for research as a vehicle for construction of their mathematical knowledge. This approach proposed research into the classroom is important, both for prospective teachers of mathematics and for students from elementary school, bringing a new phase for mathematical education that will come to schools.

Keywords: Mathematics Research. Activities of Research. History of Mathematics. Equation 2 of the degree. Degree in Mathematics.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	11
1.1 O problema em questão	11
1.2 Objetivos da pesquisa	14
1.3 Questões norteadoras	15
CAPÍTULO 2 - CONTEXTO E SIGNIFICADO DO ESTUDO	18
2.1 O ensino de matemática	18
2.2 Tendências metodológicas no ensino de matemática	19
2.3 A história da matemática como estratégia de ensino	20
CAPÍTULO 3 - ATIVIDADES INVESTIGATIVAS APOIADAS PELA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	27
3.1 Investigação matemática	28
3.2 Atividades de investigação	35
CAPÍTULO 4 - AS EXPERIÊNCIAS COM INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NA SALA DE AULA	45
4.1 O desenvolvimento das experiências	45
4.2 A primeira experiência	46
4.2.1 A busca das informações na experiência	49
4.2.2 Em busca da validação dos resultados da experiência	50
4.2.3 Os temas dos micro-projetos desenvolvidos	51
4.2.4 As atividades desenvolvidas na primeira experiência	53
4.2.5 Nossas considerações sobre a primeira experiência	53
4.3 A segunda experiência	57
4.3.1 A busca das informações	60
4.3.2 Os encontros e o local	63
4.3.3 Elaboração das atividades com o grupo de estudo	67
4.3.4. Sobre as dificuldades apresentadas pelo grupo e a atividade de superação dos obstáculos surgidos	73

4.4 Testagem das atividades investigativas	75
4.4.1 Sobre a primeira testagem	76
4.4.2 A respeito da segunda testagem	78
4.4.3 Sobre os depoimentos dos envolvidos na testagem	78
4.4.4 Nossas reflexões sobre as duas testagens	79
CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES	81
5.1 Síntese do estudo	81
5.2 Reação do grupo de estudo ao trabalho de investigação	82
5.3 Sobre as atividades de investigação	83
5.4 Sobre o desempenho do grupo de estudo	84
5.5 Uma reflexão sobre o estudo	86
5.6 Recomendações aos professores	87
REFERÊNCIAS	90
APÊNDICES	95
Apêndice A – Questionário de avaliação da experiência	96
Apêndice B – Entrevista com o grupo de estudo – 2ª experiência	97
Apêndice C – Entrevista com o grupo de estudo – 2ª experiência	98
Apêndice D – Atividade 1: Investigando e aprendendo	99
Apêndice E – Atividade 2: De onde veio essa fórmula	100
Apêndice F – Atividade 3: A fórmula hindu	101
Apêndice G – Atividade 4: Não perca o zero	102
Apêndice H – Atividade 5: Olhando o delta	103
Apêndice I – Atividade 6: A primeira fórmula	104
Apêndice J – Atividade 7: Completando quadrados 1	105
Apêndice K – Atividade 8: Completando quadrados 2	107
Apêndice L – Atividade 9: Completando quadrados 3	108
Apêndice M – Atividade 10: O x da questão	109
Apêndice N – Atividade 11: Duas vezes procurado	111
ANEXOS	112
Anexo A – Texto: Investigação sobre as Atividades de Investigação, o Professor e a Aula de Matemática	113

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1 O problema em questão

A matemática tem sido considerada, por algumas pessoas, como a grande vilã nas escolas de ensino fundamental e médio, sendo na maioria das vezes avaliada como uma disciplina que não está ao alcance de todos, e por isso classificada como de difícil compreensão, complicada e inacessível aos alunos. Há indícios de que ela tem sido ensinada de maneira a amedrontar esses aprendizes, pois uma grande parte desses procura cursos universitários ou profissionalizantes em outras áreas com a idéia de não usar a matemática no seu cotidiano, fato esse que tem chamado a atenção de docentes da rede de ensino e de pesquisadores nessa área.

Enquanto professores de Matemática, percebemos que no currículo do ensino fundamental há conteúdos considerados básicos que, muitas vezes, são utilizados em situações do dia-a-dia e que ao serem abordados e questionados pelo professor em sala de aula, apresentam uma difícil compreensão por parte dos alunos. Eles sentem dificuldades em apreendê-los, pois, muitas vezes, não conseguem estabelecer uma relação direta desses conteúdos com o cotidiano. Assim, se faz necessário que a disciplina em questão seja ensinada sob uma abordagem didática que possibilite aos alunos perceberem a importância do seu uso no cotidiano e, ainda, que ela seja concebida como parte de nossa cultura.

Como já foi explicitado, infelizmente a matemática parece não ter uma boa reputação, pois não é só o fato da procura por cursos que não tenham tal disciplina no currículo mas, também, a grande quantidade de alunos do ensino fundamental que não gostam desta disciplina. Até "sabemos" de maneira informal e anedótica que o aluno que não gosta da matemática simplesmente não gosta porque tem pouco sucesso nos seus estudos. "Sabemos" ainda mais que a razão para que o aluno encontre tantas dificuldades é porque ela é considerada uma disciplina abstrata.

Assim sendo, o aprendiz tem grandes dificuldades em entender o conteúdo, ficando assim desmotivado porque não vê nenhuma aplicação prática deste estudo. Em relação a isso, Fossa e Bezerra (1998, p. 117) relatam que, de fato, parece que as

dificuldades de aprendizagem e/ou as faltas de aplicações não são suficientes para explicar a impopularidade da matemática, nos levando a ter como hipótese que não é a sua natureza abstrata que causa o seu desfavor entre os alunos, mas o fato de a matemática, da maneira como vem sendo ensinada, não estimular nem capturar a imaginação do aluno.

Com o intuito de minimizar esse problema, resolvemos privilegiar uma abordagem que contemple o estudo de questões ligadas principalmente à elaboração de atividades investigativas, envolvendo equação do 2º grau, por meio da investigação matemática, demonstrando, assim, que o ensino de matemática pode ser mais dinâmico e compreensível para os alunos. Dessa forma, iniciamos o estudo, o qual inclui a investigação matemática como uma abordagem metodológica, tendo a história como eixo norteador, conforme poderá ser melhor compreendido no terceiro capítulo desse escrito.

Por isso, nos últimos tempos, a incorporação de atividades de investigação no currículo de matemática tem sido uma grande preocupação para os educadores desta área, por ser um tipo de abordagem que contribui para estimular nos alunos a vontade de vivenciar novas experiências matemáticas, quando estas lhes são apresentadas. Compreende-se que os tipos de aulas nas quais os alunos se envolvem em atividades de natureza investigativa colocam diversos desafios a professores e alunos, fazendo com que essas aulas sejam mais dinâmicas e criativas. Quando não há dinamicidade, o ensino e a aprendizagem da matemática tornam-se cansativos e desestimulantes, fazendo com que o aluno sinta verdadeira aversão pela disciplina.

Na perspectiva de reverter a aversão e o desinteresse dos alunos do ensino fundamental nas aulas de matemática, sentimos a necessidade de mostrar para os futuros professores que não basta dominar os conteúdos de matemática para os ensinar: é preciso criar uma técnica de ensino que desperte o interesse e a curiosidade dos alunos para, assim, tentar garantir uma melhor aprendizagem. E ainda fazer das aulas de matemática uma atividade significativa e gratificante para o professor. Há indícios de que, em algumas de nossas escolas, não há grande interesse no sentido de que os alunos aprendam matemática de modo significativo. Para modificar esta situação, precisamos apontar uma maneira de fazer com que os professores e a própria escola

tenham a oportunidade de ensinar matemática de forma contextualizada, mostrando sua importância nas diversas atividades práticas que podem ser vivenciadas pelos alunos.

Nesse sentido, as orientações curriculares mais recentes para o ensino de matemática no Brasil apresentam uma necessidade de renovação na forma como essa disciplina é ensinada nas escolas, especificamente no que diz respeito à mudança na natureza das atividades que são desenvolvidas em sala de aula. Nessa perspectiva, as atividades de natureza investigativa apresentam uma boa oportunidade para os alunos se envolverem com a criatividade, pensando matematicamente. Sobre o tema em questão, os estudos de Fiorentini e Lorenzato (2006), Fossa e Mendes (1998), Mendes (2006a), Oliveira (1998), Ponte et al. (2005), entre outros, muito têm contribuído.

Foi a partir desses estudos que sentimos a necessidade de pesquisar sobre essa abordagem, buscando formas de mostrar a um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN esse novo desafio, visto que os professores não têm o hábito de trabalhar com investigação em educação, e a opção em usar tal abordagem com os referidos alunos.

A proposta consiste em apresentar as atividades de investigação como um meio de fazer brotar nos alunos o desejo de questionamentos e o interesse em querer sempre algo além que a simples resposta aos conteúdos matemáticos estudados em sala de aula, fazendo-se notar que o ensino da matemática deve, principalmente, ocorrer no desenvolvimento do poder matemático do aluno, não essa que integra a capacidade de investigar, explorar, conjecturar e raciocinar a capacidade de usar diversos métodos matemáticos para perceber a procura de soluções para situações novas; e ainda, adquirir segurança na sua própria capacidade de fazer matemática, pois lidar com matemática é, antes de tudo, oferecer ao estudante a oportunidade de agir, e posteriormente levá-lo a refletir acerca das suas ações.

A investigação e as atividades de investigação devem estar presentes em todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática, perante as atribuições estabelecidas freqüentemente em sala de aula, abrangendo um grande número de situações novas e desafiadoras para os professores, quer quanto à organização, quer no tocante à gestão do processo de ensino-aprendizagem. A idéia de *aprender* matemática e *fazer* matemática (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2005) deixa em evidência a

importância de que os alunos tenham oportunidades de explorar atividades de natureza investigativa. O estímulo ao cálculo mental e ao raciocínio lógico matemático e criativo poderá conduzir os alunos a uma situação de aprendizagem matemática criativa, estimulante e prazerosa, pois esses alunos sempre foram acostumados a entender a matemática como algo pronto e acabado. Vale ressaltar que até mesmo certos professores apresentam dificuldades para entendê-la como algo em processo de construção.

Vemos uma necessidade de mudança de atitude e postura através de uma formação continuada para esses professores, a partir de vários encontros e discussões, a fim de que possam de fato mudar os costumes utilizados no cotidiano da sala de aula. Partindo dessa direção, estabelece-se um passo importante em relação à clareza que o professor precisa ter sobre o fato de que o aluno desenvolve o raciocínio lógico participando de atividades, agindo e refletindo sobre a realidade que o cerca. Nesse sentido propomos atividades investigativas em história da matemática com os objetivos expostos na seqüência desse estudo.

1.2 Objetivos da pesquisa

O presente estudo tem por objetivo geral investigar como um grupo de alunas do curso de licenciatura em matemática, denominado grupo de estudo, envolve-se na realização de atividades de investigação em matemática, a partir da história da matemática, partindo do princípio que o referido grupo não tem a prática de lidar com esse tipo de abordagem metodológica na disciplina de matemática.

O interesse pelo estudo surgiu da necessidade de criar condições para que cada componente desse grupo pudesse aprender a ser um investigador perspicaz fazendo, assim, uso da investigação como um método estimulante de busca do conhecimento. Dessa forma, nos interessamos em identificar as competências e os processos que esse grupo desenvolveu no decorrer das atividades de investigação matemática, propiciando ao grupo a compreensão e aquisição de novos conhecimentos matemáticos, tais como a

pesquisa matemática, a elaboração de atividades, a análise dos processos mentais que seriam utilizados no método de desenvolvimento do trabalho, etc.

A partir do objetivo geral, apresentamos os seguintes objetivos específicos:

- ✓ Identificar as dificuldades que o grupo tem em trabalhar métodos de resolução de equação em sala de aula;
- ✓ Analisar e avaliar o desenvolvimento da autonomia produtiva do grupo com relação à elaboração de atividades de investigação para o ensino de matemática;
- ✓ Elaborar, testar e avaliar um bloco de atividades a partir da investigação histórica dos métodos de resolução de equação do 2º grau;
- ✓ Organizar um bloco de sugestões para professores de matemática do ensino fundamental, centrado no uso de material elaborado.

Com a efetivação de tais objetivos, entendemos que será possível sugerir mudanças na formação inicial desses alunos, futuros docentes, a fim de que a matemática deixe de ser a “vilã” do ensino fundamental e passe a ser vista como componente importante para o entendimento de muitas questões do nosso cotidiano.

1.3 Questões norteadoras

Para uma melhor percepção desses objetivos, pretendemos neste estudo apresentar respostas às seguintes questões:

- ✓ Quais os procedimentos utilizados pelo grupo de estudo na realização de atividades de investigação?
- ✓ Como o grupo lida com os desafios encontrados nas atividades de investigação?

✓ Como se caracteriza o conhecimento didático do grupo relativo à elaboração das atividades de investigação?

✓ Que comportamento esse grupo apresenta em relação às atividades de investigação?

As questões anteriormente relacionadas fazem referência a uma discussão acerca do recurso pedagógico denominado *atividades de investigações matemáticas*, utilizando-se desse recurso para desenvolver as investigações matemáticas em sala de aula. As respostas a essas questões possuem um caráter investigativo próprio do estudo em que se inserem e constituem-se fortes indícios de diretrizes a serem tomadas para que se possam atingir outros objetivos.

A fim de proporcionar uma visão geral do trabalho de pesquisa realizado, segue uma breve descrição dos assuntos abordados, em cada um dos capítulos. Esclarecemos que a estrutura do escrito se apresenta da seguinte forma: Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5, referências, apêndices e anexos.

No capítulo 1 apresentamos a introdução do trabalho, com a problemática, os objetivos e as questões norteadoras.

No capítulo 2, discutimos sobre o contexto e significado do estudo, onde apresentamos, de forma sucinta, as tendências metodológicas no ensino de matemática, evidenciando o uso da história da matemática como estratégia de ensino.

No capítulo 3, discorremos sobre o referencial teórico para nortear os pressupostos teóricos tomados no contexto deste trabalho. Abordamos as investigações matemáticas e as atividades investigativas apoiadas pela história da matemática, a fim de estabelecer o que são essas atividades, por que o seu uso em sala de aula, como podem ser utilizadas e quais as vantagens e desvantagens de seu uso. Apontamos razões para a inclusão destas atividades nas aulas de matemática, no ensino fundamental.

No capítulo 4, apresentamos a realização de duas experiências com investigação histórica na sala de aula, nas quais descrevemos: o ambiente da pesquisa, a turma pesquisada, o grupo de estudo e os alunos, detalhando cada uma das experiências, em relação à busca das informações e validação dos resultados dessas experiências. Em

seguida apresentamos as atividades investigativas, elaboradas pelo grupo de estudo e a testagem dessas atividades com alunos da licenciatura.

Em seguida, no capítulo 5, apresentamos as considerações finais sobre a reação do grupo de estudo ao trabalho de investigação, as atividades de investigação e o desempenho desse grupo, fazendo uma reflexão sobre o estudo e recomendações aos professores para a busca de um ensino de matemática que tenha significado para o aluno. Finalmente, são apresentados as referências, os apêndices e os anexos que deram suporte a este trabalho.

Antes da discussão do recurso pedagógico, em análise, trataremos no próximo capítulo do contexto e significado desse estudo.

CAPÍTULO 2 – CONTEXTO E SIGNIFICADO DO ESTUDO

2.1 O ensino de matemática

A matemática é freqüentemente considerada uma ciência exata, uma área do conhecimento pronta, acabada e perfeita, uma "linguagem" altamente purificada, desligada dos símbolos dos objetos e ligada aos símbolos das relações, ou seja, na sua construção no imaginário, ela é desligada dos objetos reais, passando a representá-los através de símbolos. Conseqüentemente, no contexto escolar, é associada à disciplina do certo ou errado, em que é sempre importante dominar certas regras e técnicas para se ter sucesso, e para que isso ocorra, os professores ensinam aos alunos fórmulas, algoritmos, modelos, artifícios, etc.

A conseqüência dessa visão é o autoritarismo do professor em sala de aula, o qual supõe ter uma boa preparação em relação ao conhecimento matemático e o transmite ao aluno de forma direta, desprovida de um método apropriado, exigindo assim um conhecimento além do que esse aluno dispõe.

Contudo, essa é uma concepção equivocada, pois para que esses alunos aprendam matemática de modo eficaz é preciso lhes dar condições para que possam compreender o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos. Isso poderá ser conseguido através de uma metodologia de ensino que busque uma aproximação do trabalho realizado em sala de aula ao trabalho realizado pelos matemáticos.

Dessa maneira, podemos dizer que muitas dificuldades dos alunos são reflexos do método utilizado pelos professores. Faz-se necessário, portanto, elaborar atividades nas quais o aluno *experimente matematicamente*, ou seja participe da prática de produção matemática a partir de experiências. Nesse sentido, as orientações curriculares oficiais para o ensino da matemática (BRASIL, 2001b) apontam a necessidade de mudança no ensino da matemática escolar, mudança essa que passa pela modificação na natureza das atividades que são propostas aos alunos, a fim de que eles compreendam de forma significativa os conceitos explorados na educação

básica. Surge, a partir daí, a necessidade do uso de investigações matemáticas como uma atividade de importância fundamental para essa modalidade de ensino.

De acordo com vários estudos já realizados por diversos estudiosos do tema, compreendemos que *aprender* matemática implica *fazer* matemática e, antes de tudo, compreender a sua natureza. A partir do momento em que o indivíduo estabelece relações entre suas experiências e o conhecimento matemático, esse indivíduo passa a ter motivação para aprendê-la. E se essa disciplina for ensinada de forma que chegue ao aluno apenas como um produto final, torna-se difícil essa compreensão.

Nesse sentido, é importante possibilitar atividades matemáticas nas quais o aluno se envolva fazendo investigações que permitam a formulação de conjecturas e escolha testes adequados para validar ou rejeitar tais conjecturas. Trabalhar nessa perspectiva pode levar ao entendimento de que *aprender* matemática é *fazer* matemática. É para essa tendência metodológica que apontam os estudos atuais que traremos a seguir.

2.2 Tendências metodológicas no ensino de matemática

Fiorentini e Lorenzato (2006) destacam que cada uma das tendências metodológicas traz alguma contribuição para a área da matemática e que não dá para afirmar que uma é superior à outra, nem também negar nenhuma delas. A escolha de uma abordagem metodológica depende, em grande parte, do professor/pesquisador. Além disso, sabemos que nenhum método é completo, todos têm restrições e estabelecem recortes parciais do fenômeno educativo. É importante apresentar caminhos diferentes de trabalho em sala de aula que contribuam para a melhoria da prática docente, assim como é igualmente importante dar condições para que os futuros e atuais professores saibam lidar com as dificuldades apresentadas em sala e saibam propor modelos de atividades matemáticas que envolvam a participação ativa do aluno e do professor.

Para abordar as tendências metodológicas, tomamos por base os estudos de Mendes (2006a, p. 15), o qual afirma que a Educação Matemática tem como finalidades

principais “desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores de ensino, elaborar e implementar mudanças curriculares, além de desenvolver e testar materiais de apoio para o ensino de matemática”. Em seus escritos, Mendes identifica e descreve tais tendências, como o uso de materiais concretos e jogos, a etnomatemática, a resolução de problemas, a modelagem matemática, a história da matemática como estratégia de ensino da matemática escolar, o uso de computadores e calculadoras no ensino da matemática.

Essas tendências, que têm contribuído para caracterizar a Educação Matemática, devem estar presentes na matriz curricular dos cursos de formação de professores desta área e integrar o Projeto Político Pedagógico desses cursos, bem como ser largamente exploradas pelos professores responsáveis pela formação docente. Tais tendências devem ser entendidas como meio que fundamentará metodologias para a prática docente. Dentre elas, destacamos a história da matemática como eixo norteador nesse estudo.

2.3 A história da matemática como estratégia de ensino

Conforme já mencionamos no primeiro capítulo, a história da matemática será o eixo norteador das atividades investigativas e, portanto, é importante entender que a história da matemática no contexto da prática escolar é um componente necessário para se cumprir um dos objetivos primordiais da matemática como disciplina escolar, pois é preciso que os alunos entendam a natureza da matemática e sua relevância na vida cotidiana, além de como ela se desenvolveu ao longo dos anos.

Muitos são os pesquisadores da área de Educação Matemática que têm se preocupado com o uso de abordagens históricas na sala de aula. Existem, atualmente, muitas publicações nessa área, que fazem uso da história da matemática, considerando aspectos e fatores que servem para motivar o interesse dos alunos e professores. Existem também, debates a respeito da história da matemática na educação e isso se reflete nos livros didáticos e paradidáticos, bem como na formação de grupos de pesquisa nessa área de conhecimento.

Segundo as Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica, Paraná (2006), a abordagem do ensino da matemática através da história não se resume a descrever com precaução as curiosidades ou biografias de matemáticos famosos, mas sim fazer a ligação das descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos, às circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época.

Com relação ao uso da História da Matemática em Educação Matemática, Mendes (2006b) apresenta várias razões para representar o seu uso: a história aumenta a motivação para a aprendizagem da matemática, humaniza a matemática, mostra o seu desenvolvimento histórico através da ordenação e apresentação dos tópicos no currículo, os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram, contribui para as mudanças de percepções dos alunos com relação à matemática.

A história da matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação de situações-problema e na busca de referências para melhor compreender os conceitos matemáticos, pois possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. Além disso, a história da matemática é rica em registros de situações práticas do cotidiano que mostram o problema como elemento principal para o ensino dos conceitos matemáticos. Contudo, no ensino estático, desvinculado de qualquer significado, o professor, ao apresentar uma operação matemática ou um conceito novo, descreve-os sempre da mesma maneira, que vai desde a apresentação do conceito, das propriedades, da fórmula para só depois sugerir uma lista de problemas para desenvolver a operação, a fórmula ou o procedimento matemático trabalhado.

Na mesma linha de pensamento, Miguel e Miorim (2005, p. 45) afirmam que “a história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar na atualidade”. Compreendemos, então, que a história da ciência e, em particular, a história da matemática, constitui um dos mais importantes capítulos do conhecimento, pois permite compreender a origem das idéias que deram forma à nossa cultura matemática e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas idéias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram. Assim, esta história é considerada um

valioso instrumento para o ensino e a aprendizagem da própria matemática. A partir dessa história podemos entender porque cada conceito foi introduzido nesta ciência e o motivo pelo qual se insere de maneira natural no corpo do conhecimento matemático.

Ao utilizar a história da matemática, é também possível estabelecer conexões com ela e outras áreas de ensino. Analisando-a, percebemos que todas as teorias que hoje conhecemos resultaram sempre de desafios que os estudiosos da área enfrentaram ao longo do tempo, foram desenvolvidas com grande esforço e, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta. Daí a tendência da história da matemática ser considerada importante no ensino, por estudiosos como Mendes (2006a), Miguel e Miorim (2005), dentre outros. Para esses estudiosos, há uma grande dificuldade para motivar os alunos a estudar matemática, assim a história aparece como um elemento norteador e de grande importância para a aprendizagem dessa disciplina.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001b), a história da matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em matemática. Pode, também, esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. No entanto, se a história da matemática for tratada como um assunto específico ou conteúdo, ela não será suficiente para motivar esses alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Em matemática, dever-se-ia sempre perguntar: como foi que isto começou? Como foi feito isto? É provável que a recapitulação de fatos históricos indique a técnica pedagógica que deva ser utilizada hoje para se ensinar matemática a um aluno. Por que não repetir, abreviadamente, o processo histórico até o aluno sentir a necessidade de "simplificar"? A história seria uma saída para retirar o aluno da condição de mero observador, tornando-o mais ativo em suas descobertas. Mesmo com algumas dificuldades, a utilização da história pode tornar o processo ensino-aprendizagem mais significativo, fazendo o aluno reagir diante de novos fatos, estabelecendo entre ele e o estudo da matemática uma relação mais harmoniosa, pois para compreender os

conteúdos dessa disciplina seria interessante retomar os estudos sobre a sua criação, seus problemas e as suas soluções através da história. Assim, cria-se um elemento de motivação cujo uso traria o esclarecimento de “porquês” matemáticos que constantemente são questionados pelos alunos em quase todos os níveis de ensino. Isso nos mostra que estudar ou ensinar história da matemática aos estudantes do ensino fundamental favorece uma aprendizagem mais expressiva com relação à matemática, trazendo esclarecimentos que foram essenciais ao crescimento e desenvolvimento da humanidade em geral.

Mendes (2005a) propõe, através dos seus estudos, que uma das melhores maneiras de se aprender matemática na sala de aula, hoje, é através de um ensino mais prático e dinâmico, tanto por parte do professor quanto do aluno, de maneira que ambos sejam sujeitos de atividades práticas. Para melhor esclarecer a questão, o autor, explicita que

a história pode ser nossa grande aliada quanto à explicação desses porquês, desde que possamos incorporar às atividades de ensino-aprendizagem aspectos históricos necessários à solução desse obstáculo. Tais informações históricas devem certamente passar por adaptações pedagógicas que, conforme os objetivos almejados, devem se configurar em atividades a serem desenvolvidas em sala de aula ou fora dela (extra classe). Além disso, devem recorrer a materiais manipulativos sempre que necessário sem perder de vista que a aprendizagem deve ser alcançada a partir das experiências e reflexões dos próprios estudantes. Todavia, devem possuir uma carga muito forte de aspectos provocadores da criatividade imaginativa dos estudantes, bem como de fortes indícios dos aspectos socioculturais que geraram a construção dos tópicos matemáticos abordados na atividade (MENDES, 2005a, p. 53).

Mendes explicita, também, que para o ensino de matemática alcançar esses objetivos, oportunizando aos estudantes o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos úteis, preparando-os como homens comuns, para ter uma compreensão sobre o conhecimento matemático ensinado na escola, é importante que haja uma metodologia que valorize a ação docente do professor. Podemos perguntar: como isso poderia ser realizado? Através de um ensino que parta do concreto para o abstrato. Ainda sobre esse ensino, o referido autor deixa claro que, trabalhando nessa

perspectiva, os estudantes deixam de ser espectadores e passam a assumir um papel de investigadores criativos, ou seja, a pesquisa passa a se constituir em um princípio científico e educativo. Dessa forma, a matemática passa a ser um importante componente na compreensão do mundo. Para isso, ele esclarece que

[...] o professor deve propor situações que conduzam os alunos à (re)descoberta do conhecimento através do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigativos, através de explorações (investigações), pois nessa perspectiva metodológica espera-se que eles aprendam o “quê” e o “porquê” fazem/sabem desta ou daquela maneira, para que, assim, possam ser criativos, críticos, pensar com acerto, a colher informações por si mesmos face a observação concreta e usar o conhecimento com eficácia na solução dos problemas do cotidiano. Essa prática, então, dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, através da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios (MENDES, 2005a, p. 54).

Ainda de acordo com Mendes (2005a), “esse tipo de abordagem metodológica permite aos alunos levantarem hipóteses e interpretá-las, para depois discuti-las em classe com o professor e os colegas”. Mesmo que a escola não ofereça condições e materiais desejáveis para o exercício dessa prática, não se justifica a omissão do professor, pois é necessário tentarmos melhorar de alguma forma a qualidade do ensino, adaptando-a às condições da escola e dos alunos. Ele ainda argumenta que o professor não pode deixar de levar em consideração que a utilização didática da história deve ser aliada às condições habituais dos estudantes, pois é

a partir da incorporação dos aspectos socioculturais pelos quais os estudantes compreendem e explicam a sua realidade. Além disso, pode lançar mão de outros instrumentos de aprendizagem que enfatizem no processo de construção histórica uma dinâmica cultural existente no conhecimento matemático construído (MENDES, 2005a, p. 55).

Dessa maneira, podemos afirmar que trabalhar numa perspectiva investigativa, conectada com a história da matemática, certamente exige que o professor busque informações sobre o passado, não apenas para descrever como foi esse passado, mas

com a preocupação de fazer uma ação/reflexão sobre tal passado, compreender o presente e projetar o futuro.

A história da matemática é uma área de estudo da Educação Matemática e também um instrumento metodológico para pesquisa. Seu uso surge como um meio adicional, não apenas como motivação para criar disponibilidade ao aprendizado, mas também para a compreensão dos conteúdos que são apresentados em sala de aula. Ela é importante, pois levanta questões relevantes e fornece problemas que podem motivar, estimular e atrair os alunos, além de desenvolver neles a capacidade matemática, o crescimento pessoal e habilidades como a leitura, a escrita, a procura por fontes e documentos, a análise e a argumentação, e através dela os alunos podem identificar que, além dos conteúdos, a matemática possui forma, notação, terminologia, modos de expressão e representações. Quanto aos professores, estes podem identificar que algumas dificuldades que surgem na sala de aula hoje já apareceram no passado, além de constatar que um resultado aparentemente simples pode ser fruto de uma evolução árdua e gradual.

Para Fossa e Mendes (1998, p. 130), “a incorporação da história da matemática dentro de uma metodologia de ensino centrado em atividades de redescoberta, traz muitas vantagens para o ensino da matemática”, pois seu uso tem uma tendência a interessar e motivar o aluno para o estudo do assunto em pauta. Já foi verificado que, na maioria das vezes, os alunos, quando questionados sobre essa metodologia, apreciam a idéia de pesquisar alguma coisa sobre a história da matemática, mas normalmente perdem o entusiasmo ao se deparar com alguns obstáculos, e logo em seguida se desestimulam, após iniciar o novo estilo de metodologia, provocado pela aridez do estudo. Para que haja maior interesse no uso da história, acreditamos que é importante introduzi-la através de atividades, pois a partir disso é provável que aconteça um maior interesse por parte dos alunos, para que estes apresentem entusiasmo pelos problemas que os desafiam, fazendo com que haja uma maior integração entre eles.

Conforme os estudos realizados por Fossa e Mendes (1998, p. 131), “a história ajuda a delimitar os conceitos a serem abordados e, portanto, dá uma estrutura a estes conceitos. Tal estrutura beneficia o professor a desenvolver todo o currículo proposto”,

pois a história pode evidenciar que a disciplina de matemática não deve se limitar a um sistema de regras e verdades prontas e acabadas, mas a algo humano e envolvente. É ela que executa com clareza os diferentes domínios da matemática, desenvolve uma possibilidade de vínculo interdisciplinar com outras disciplinas, como geografia, história, língua portuguesa, etc. Desse modo, a história da matemática é elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas em um contexto específico de sua época.

Acreditamos que o uso da história da matemática na sala de aula valoriza o ensino dessa disciplina e, sem dúvida, valoriza também todas as publicações e pesquisas que auxiliam alunos e professores nestas verdadeiras viagens. Dessa forma, podemos entender que é possível buscar, na história da matemática, apoio para se atingir com os alunos objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo:

(1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das idéias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de idéias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL; MIORIM, 2005, p. 53).

Obviamente não esperamos que todos esses objetivos sejam alcançados em sua totalidade, mas compreendemos que é possível mostrar a importância deles perante os alunos, estimulando-os a pensar melhor sobre essas idéias.

Todas as tendências explicitadas anteriormente podem ser trabalhadas via investigação, e nós vamos considerar a história da matemática como uma dessas tendências, a fim de trabalhar com a perspectiva investigativa. Sobre isso trataremos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3 – ATIVIDADES INVESTIGATIVAS APOIADAS PELA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Conforme já foi exposto anteriormente, neste estudo trabalhamos com a perspectiva investigativa, tendo a história como eixo norteador. É necessário, entretanto, explicitarmos que um dos grandes problemas no ensino da matemática é o medo que os estudantes, em qualquer nível de ensino, sentem pelo mito, criado e alimentado ao longo do tempo, de que a matemática é difícil de ser aprendida, o que é justificável, pois as atividades utilizadas pelo professor em sala de aula são, na maioria das vezes, desestimulantes quando deveriam ser desafiadoras. Modificar essa visão arraigada constitui um desafio pedagógico que deve ser enfrentado pelos professores.

Há já indícios de uma educação que tenta mudar isto, mas os esforços se concentram bem mais nas séries anteriores, deixando as demais ainda quase que totalmente abandonadas. Conforme cita Mendes (2006b, p. 105)

o uso de atividades como recurso para aprendizagem da matemática, geralmente é desenvolvido nas primeiras séries do ensino fundamental, devido a concepção dos professores acerca do processo de construção desse conhecimento pelas crianças. Entretanto, acreditamos que, de acordo com o nível de complexidade do conhecimento a ser construído pelos estudantes, independente do nível escolar em que se encontrem, é adequado o uso de atividades que favoreçam a interatividade entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento, sempre em uma perspectiva contextualizadora que evidencie três aspectos do conhecimento: o cotidiano, o escolar e o científico, principalmente quando são rearticulados ao longo do processo de manuseio de qualquer componente da atividade (o material manipulativo, as orientações orais e escritas e o diálogo estabelecido durante todo o processo ensino-aprendizagem, etc.).

O uso de atividades desenvolvidas levando-se em consideração, neste processo de desenvolvimento, a história da matemática no ensino desta, em sala de aula, favorece a participação ativa do aluno, de modo a interagir com os novos conceitos a serem pesquisados, o que vem a ser uma extensão de como a matemática era encarada por atividades nas séries iniciais. Favorece, também, uma melhor integração

com seus colegas de sala, de modo a compartilhar a construção de seus próprios conhecimentos, e ter com o professor uma relação mais aberta, podendo interagir nos momentos da aplicação das atividades sendo, o professor, o mediador da situação. Essas atividades podem ser feitas com materiais manipulativos, estabelecendo uma relação com a história e o cotidiano dos alunos, como defende Fossa (2001).

No Brasil, há uma grande dificuldade de se encontrar materiais sobre a história da matemática. Assim, o professor é condicionado a utilizar o material disponível no mercado. É importante mencionar que normalmente ele faz uso desse material mais como uma ferramenta mecânica sem fazer, no entanto, uso da história. O uso é feito sem uma consciência de que existem inúmeras possibilidades de abordagens que podem ser resgatadas dessa história e isso ocorre porque o professor não se dedica a pesquisar e nem estimula o aluno a isso, contribuindo assim para que a matemática fique sempre muito misteriosa, distante e pouco conhecida. Normalmente, a história da matemática só é usada como parte ilustrativa, e não como uma parte integral do conteúdo.

A partir do que foi compreendido nos estudos de Mendes e Fossa, podemos afirmar que a grande maioria da comunidade da Educação Matemática chegou ao consenso de que o ensino baseado em atividades é uma das maneiras mais eficazes de ensinar matemática. De acordo com esses autores, uma atividade para ficar completa precisa estar munida de três tipos de representações dos conceitos: uma representação *física*, onde é trabalhado o material manipulativo; uma representação *oral*, onde é feita a discussão do grupo para, se necessário, fazer a apresentação dos resultados e, por último, uma representação *simbólica*, onde é feito o registro por escrito. Esse registro por escrito é de suma importância para que o aluno aprimore os conceitos que foram abordados nas diversas atividades e desenvolva a habilidade de representar e ler matemática através de seus símbolos.

3.1 Investigação Matemática

Conforme o que já expusemos nos capítulos anteriores, a investigação deve fazer parte do cotidiano de sala de aula, pois é tida como uma atividade de ensino e de

aprendizagem que contribui para melhorar o ensino na sala de aula. As investigações, de um modo geral, apontam para a possibilidade de um ensino de matemática capaz de ajudar os alunos e professores a converterem-se em aprendizes que sabem usar o raciocínio. Realizamos uma investigação quando conseguimos formular nossas próprias perguntas e procuramos respondê-las, de modo claro e conciso. Investigar, em se tratando de ensino-aprendizagem, significa trabalhar a partir de perguntas que nos interessam e que se apresentam, a princípio, de forma confusa, mas que é possível tornar claro e analisar de forma ordenada.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 13), “para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Quando esses autores conceituam investigação matemática, escrevem que essa atividade desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas, podendo até dizer que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema e, depois, resolvê-lo. Tais investigações fornecem um bom contexto para que os alunos percebam a necessidade de justificar as suas afirmações ao exprimir o seu raciocínio junto ao professor e seus colegas de sala.

Tomando por base os autores citados anteriormente, a investigação matemática tem sido interpretada como uma atividade matemática que envolve quatro momentos principais:

1. Exploração e formulação de questões investigativas;
2. Organização de dados e construção de conjecturas;
3. Realização de testes e, eventualmente, sistematização das conjecturas;
4. Construção de justificativas, demonstrações e avaliação do trabalho realizado.

Cada um desses momentos, anteriormente citados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), podem envolver atividades com etapas características de uma investigação.

Esses momentos podem ser observados no quadro a seguir:

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> • Justificar uma conjetura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Quadro – Momentos na realização de uma investigação
(PONTE; BROCARDI; OLIVEIRA, 2005, p. 21)

Os autores, anteriormente citados, evidenciam que estas etapas não correspondem a processos que ocorrem de forma linear e ordenada. A investigação matemática é caracterizada por vários processos matemáticos: a recolha e organização de dados, a formulação e teste de conjecturas, a prova, tudo isso são fases do processo investigativo que devem ser explorados tanto num sentido como em outro, sendo de fundamental importância observar a comunicação entre eles.

Todos esses momentos estão ao alcance dos alunos, e podem ser envolvidos em atividades específicas de sala de aula. De acordo com os autores anteriormente citados, é importante saber que estes momentos não precisam obedecer a uma ordem e que podem surgir de acordo com a necessidade.

Na perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira,

em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado. (2005, p. 9)

Esses autores afirmam ainda que,

investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2005, p. 10).

De um modo geral, investigar não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de grande importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores quanto dos alunos. A investigação matemática é mais uma alternativa didático-pedagógica para o professor optar na realização de um ensino significativo da referida disciplina.

Esse tipo de investigação em sala de aula é considerado de suma importância, pois o desenvolvimento do trabalho que é realizado em equipe, onde a utilização da argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios, oportuniza aos alunos a produção de significados para a matemática que mobilizam e desenvolvem através de seus registros. Além disso, no momento de socializarem suas

produções com os outros grupos, eles podem validar ou negar muitas conjecturas que antes achavam que eram corretas.

Pensando assim, o ambiente de sala de aula, através da produção de conhecimento matemático, assemelha-se com aquele vivido pelos matemáticos, quando estes trocavam correspondências e se comunicavam entre si, tentando alcançar um maior conhecimento matemático. É importante a metáfora de investigação matemática “*como uma viagem ao desconhecido*”, pois mesmo que essa investigação já possa ter sido realizada por outros estudiosos, dá aos alunos a oportunidade de fazer matemática da mesma maneira que os matemáticos a faziam, pois desta vez será o aluno que terá de escolher qual a direção a seguir.

Numa investigação matemática, o aluno pode passar a agir como um matemático, realizando todas as etapas dos momentos principais de uma investigação em sala de aula, principalmente na justificação e argumentação perante os seus parceiros e o professor. A partir desse momento, o aluno percebe a importância de aprender matemática, tentando aproximar o ato de *ensinar* e *aprender* matemática na escola do ato de fazer matemática, pois ambos envolvem processos de raciocínio complexos, exigindo um alto grau de empenho e criatividade por parte dos participantes.

Daí pode-se dizer que as investigações matemáticas diferenciam-se das demais por se tratarem de situações-problema desafiadoras, que possibilitam ao aluno o desenvolvimento de autonomia na busca de meios para a investigação. Tendo em vista que a partir do momento que essas investigações matemáticas forem realizadas pelo aluno, não é o matemático do passado que está investigando, mas sim o aprendiz. Devemos, então, considerar as motivações e os objetivos que o levaram a realizar essa tarefa.

Nessa perspectiva, Oliveira et al. (1999, p. 108) revela que

[...] a realização de um trabalho de cunho investigativo constitui uma experiência tão fundamental para o aluno que quer aprender Matemática como para o professor que quer aperfeiçoar sua prática. Encontrar formas de facilitar esses processos é um dos grandes desafios que se colocam a todos aqueles que trabalham na formação de professores e na investigação educacional.

Sendo assim, o professor quando se compromete a realizar uma metodologia de ensino centrada nos processos de produção de conhecimentos dos alunos têm o propósito de achar que se não atingiu os objetivos, então nada valeu a pena. Mas é preciso saber que a matemática, além de conter todo seu conteúdo, contém, também, todo o processo de descobrir, reunir e dar sentido aos conteúdos. Esses professores ainda se mostram inseguros quanto ao cumprimento de uma lista de conteúdos e de habilidades que devem ser ensinadas por eles e aprendidas por seus alunos. Insegurança esta que aumenta ainda mais se considerarmos a pressão exercida pela escola e pelos governantes para que sempre haja bons resultados de aprovação, no que tange principalmente à quantidade de alunos aprovados. É preciso, também, levar em consideração que o professor pode ou não estar preparado para investir nesse modelo de investigação matemática, apesar de ser claro que a partir do momento que resolve trabalhar numa aula que privilegia investigações, será requerido dele, além de novas aptidões, também, em grande parte do tempo, conhecimentos matemáticos num nível diferente daqueles que foram vivenciados por ele enquanto aluno de escola secundária ou de nível superior.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 23), o conceito de investigação matemática como atividade de ensino e aprendizagem

ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade genuína, construindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.

Esses autores alertam que o professor não deve limitar-se a essa metodologia: o aluno deve ter o momento para as resoluções dos exercícios, dos problemas, dos projetos e, finalmente, das investigações. É importante que o professor e os alunos tenham autonomia para articular os diferentes tipos de tarefas, para que possam juntos trabalhar de forma mais abrangente, respeitando a necessidade do currículo escolar, de

maneira interessante e motivadora, prontos para desenvolver o raciocínio matemático escolar em diferentes níveis.

Ainda em se tratando de uma investigação matemática, com base nos estudos feitos, para se trabalhar nessa perspectiva, deve-se partir de uma questão mais ampla e pouco estruturada e, a partir desta, se formular uma questão mais precisa, e sobre ela produzir diversas conjecturas, as quais devem ser testadas. As que resistirem a vários testes ganham credibilidade, estimulando assim, a realização de uma prova que poderá lhe conferir a validade matemática. A causa da investigação está no descobrimento de idéias inovadoras, a partir da curiosidade e gosto em resolver problemas, explorar, explicar e confrontar as suas idéias com as dos colegas de sala de aula, justificar as suas opiniões e descrever processos utilizados na realização de atividades, entre outros.

Um estudo realizado por Castro (2004), aborda questões ligadas à investigação sobre a sua própria prática profissional, tendo como foco as investigações matemáticas. Em seu trabalho, a pesquisadora analisou o papel desempenhado pelas experiências pedagógicas com investigações matemáticas em sala de aula, em seu processo de constituição profissional como professora de matemática. O estudo apresentou a experiência de fazer um planejamento, vivenciar, escrever e refletir sobre a investigação matemática em sala de aula, e deixou clara a sua importância para o ensino.

Ponte (2002) destaca que a investigação sobre a própria prática pode ajudar os professores a se tornarem autênticos protagonistas do processo educacional na medida em que participam da construção dos conhecimentos do trabalho docente, e da edificação do patrimônio cultural do grupo profissional do qual fazem parte.

Assim, podemos dizer que o nosso trabalho aproxima-se do que esses dois estudiosos mencionaram anteriormente, pois as atividades de investigação possibilitaram ao grupo planejar, vivenciar e refletir sobre a investigação matemática através da experiência pedagógica.

É importante ressaltar que a investigação não resolve totalmente os problemas da educação ou do caso específico da Educação Matemática, pois mesmo sendo uma metodologia viável, tem também limites, mas é de suma importância para que se alcance os objetivos e melhore a qualidade do ensino e da produção de conhecimento,

tanto do professor quanto do aluno. Essa investigação por parte dos alunos não deve ser feita esporadicamente, deve ser uma atividade de uso freqüente nas aulas de matemática. Para isso, o professor deve estar sempre apontando caminhos para o aluno seguir em frente com as pesquisas investigativas.

Acreditamos que já é tempo de considerar o aluno capaz de aprender matemática. Mas, para que isso aconteça, é necessário que eles tenham a oportunidade de interagir matematicamente, mesmo que no processo apresentem dificuldades de acompanhar determinados conteúdos ministrados em sala de aula, e que em determinados momentos o professor sinta dificuldade em encontrar uma solução para orientá-lo a uma aprendizagem efetiva dessa disciplina. Demonstrando que eles conseguem aprender e desenvolver um bom trabalho, o aluno perceberá que para aprender matemática é preciso que ele vá além da resolução de exercícios. Esses podem ser substituídos por atividades desafiadoras de cunho investigativo, assunto que trataremos a seguir.

3.2 Atividades de investigação

As atividades de investigação se constituem em excelente alternativa didática na qual os alunos têm possibilidades de potencializar seu conhecimento a respeito da matemática. Por este motivo, essa abordagem deve ser incluída no currículo pois constitui-se importante recurso de concretização dos objetivos do ensino da matemática. Trabalhar em tal perspectiva estimula o pensamento do aprendiz e permite um trabalho diferenciado, atendendo assim, aos diversos níveis de aprendizagem no ensino básico.

É necessário destacar que as atividades de investigação fazem parte das novas tendências do ensino da matemática e das reformas curriculares e que são consideradas um importante avanço na área educacional, embora essas propostas de reformas quase não apresentem trabalhos que tratem de investigação matemática. Isso nos leva a crer que tal abordagem metodológica ainda não foi incorporada às propostas

curriculares pela ausência de clareza sobre as possibilidades de aprendizagem que as atividades de investigação trazem para o aluno.

Todavia, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 2001b), tanto as propostas curriculares quanto os inúmeros trabalhos desenvolvidos por grupos de pesquisa ligados a Educação Matemática, ainda são bastante desconhecidos da grande maioria dos professores que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram essas reformas. O que se observa é que idéias, ricas e inovadoras, às vezes não chegam aos professores, ou são, na maioria das vezes, incorporadas aparentemente ou recebem interpretações impróprias, sem provocar mudanças desejáveis.

Para muitos autores, aprender matemática é um processo ativo que deve ser encarado como algo destinado a recriar o poder imaginativo e criador, de modo a se tornar gratificante para todos os alunos. No entanto, há indícios de que predomina em boa parte das escolas um ensino estático, desvinculado de qualquer significado, onde os conteúdos são tratados isoladamente e ministrados mecanicamente sem dar lugar à forma de pensamento dos alunos, e a figura do professor é associada à autoridade máxima da sala de aula.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais, a importância de levar em consideração o “conhecimento prévio” dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderada, pois

na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer da atividade prática da criança, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para o tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal (BRASIL, 2001b, p. 23).

Logo, deve-se considerar, também importante, o uso de atividades de investigação como mais uma contribuição para o ensino de matemática, pois essas atividades de investigação devem ser analisadas principalmente como uma maneira de introduzir no ensino de matemática um pouco do espírito investigativo. Para isso é

importante que as investigações não sejam consideradas como mais um conteúdo a ser ensinado sem sentido ou direcionamento, mas como uma alternativa didática para o ensino da matemática. É através da realização de atividades de investigação que os alunos adquirem concepções da matemática como ciência e como disciplina escolar e, desta forma, tendem a melhorar o seu desempenho matemático. Porém, é necessário ter clareza do que sejam as atividades de investigação e, para tal, algumas questões são colocadas e discutidas quando se fala dessas atividades em sala de aula:

- O que são atividades de investigação?
- Por que o uso de atividades de investigação?
- Como podem ser utilizadas em sala de aula?
- Quais as vantagens e desvantagens no uso dessas atividades?

Por atividades de investigação entendem-se todas as atividades nas quais os alunos são mobilizados a realizar investigações matemáticas através de ações que resultam da exploração das idéias desses alunos, sejam elas exploração e problematização de uma situação, comunicação de forma oral ou escrita, demonstração e provas de resultados, entre outros mais. É preciso perceber, entretanto, que nesse tipo de atividade, os alunos desenvolvem a sua criatividade e recorrem a seus conhecimentos prévios para alcançar os objetivos da atividade.

Pela ausência de clareza, muitos professores deixam de propor investigações a seus alunos, pois entendem que essas atividades não fazem parte do currículo. É preciso entender que tais atividades, além de fazerem parte do currículo, ajudam a reordenar o pensamento do aluno, visto que qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de investigações e o papel do professor na condução desse tipo de trabalho é perceber as dificuldades surgidas e fazer a intervenção necessária, no sentido de reordenar o pensamento do aluno em relação à conjectura levantada. Outro aspecto a ser considerado é a possibilidade de estabelecer ligação da matemática com outras áreas do conhecimento.

Em uma atividade de investigação, os alunos partem à procura do desconhecido, formulando, testando e provando as suas próprias conjecturas, aprendendo a formular a sua própria matemática, sem perder de vista a matemática já estabelecida

formalmente. Conforme foi possível perceber, a partir dos estudos feitos por Mendes e Fossa (1998), em alguns casos é preciso bastante tempo para executar uma atividade de investigação, devido a sua elaboração e complexidade e, em outros, não necessitam de um envolvimento tão prolongado. As atividades de natureza investigativa são claramente atribuídas de maneira clara, da seguinte forma: numa atividade de investigação, os alunos iniciam explorando uma situação aberta, procurando regularidades, construindo e testando conjecturas, argumentando e comunicando de forma oral ou escrita as suas conclusões.

Qualquer conteúdo da matemática pode ser abordado por meio de atividades de investigação, pois as mesmas são favoráveis à ligação da matemática com outras áreas de conhecimento, constituindo-se em ações educativas que se relacionam com importantes processos de elaboração de raciocínio e são bastante úteis no crescimento e consolidação de conceitos e idéias matemáticas, podendo permitir uma visão mais ampla da matemática, bem mais próxima da verdadeira prática do matemático.

As atividades de investigação podem oferecer aos alunos a oportunidade de *fazer matemática para aprender matemática*, posto que as mesmas delineiam métodos matemáticos que podem ser utilizados para a formulação dos conteúdos pelos alunos, bem como desenvolver suas habilidades matemáticas durante o exercício da investigação, pois como explicita os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001b), a matemática pode contribuir para a formação cidadã do aprendiz, à medida que sejam desenvolvidas metodologias que possam enfatizar a investigação e possibilitar a comprovação de resultados. Assim o educador, ao investigar, poderá desenvolver sua autonomia e auxiliar no desenvolvimento desta em seus alunos.

Ponte (2005, apud CAMARGO, 2006) explicita que a aprendizagem da matemática leva a refletir sobre a importância dos exercícios e de outras experiências matemáticas. Para esse autor, o que está em causa na aprendizagem escolar da matemática é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem não só o conhecimento de fatos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocinar e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas,

empregando idéias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

Para que este ideal se concretize é necessário que muitos fatores sejam atendidos. Entre eles, encontra-se a iniciativa do professor em utilizar múltiplas formas e linguagens para ensinar, pois quanto mais variadas forem as abordagens utilizadas pelo professor, maiores serão as oportunidades de aprendizagem favorecidas pela cooperação entre o professor e os alunos.

É importante deixar claro que, do mesmo modo que as atividades de investigação estimulam nos alunos o desenvolvimento de capacidades, também as exigem. Para que os mesmos obtenham êxito em uma atividade de natureza investigativa, eles precisam compreendê-la, precisam descobrir os padrões, as relações, as semelhanças e as diferenças, de modo a conseguir chegar a generalizações. Acreditamos que, assim, os alunos terão mais possibilidades de encontrar sentido para a matemática, pois ao mesmo tempo em que estão *fazendo* matemática, estão também *aprendendo* matemática.

Compreendemos que o domínio da matemática escolar poderá ocorrer com mais significado a partir das atividades de investigação realizadas pelos alunos, porque os levam a assumir o papel de matemáticos: há de se considerar que, tal como os matemáticos se envolvem com bastante empenho na resolução dos problemas, também os alunos devem se sentir motivados para a realização da tarefa.

Para Ponte et al. (2005), a integração das atividades de investigação no currículo de matemática justifica-se por diversas razões, as quais serão explicitadas na seqüência desse estudo. De fato, para que os alunos desenvolvam uma visão mais geral da matemática, é preciso que comecem a se envolver em atividades de investigação, tipo formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e provar resultados. Acreditamos que se não houver esse tipo de envolvimento, é pouco provável que o aluno consiga realizar uma aprendizagem expressiva. Normalmente, quando os alunos se envolvem em atividades dessa natureza, quando começam a se interessar por aquilo que estão fazendo, aprendem a desenvolver seu próprio método de resolução em determinadas atividades. Eles aprendem, também, a dividir suas idéias, pois discutem com seus colegas seus

possíveis resultados, fazendo com que o trabalho se torne mais estimulante e participativo, levando-o a se envolver verdadeiramente na atividade de investigação.

Salientamos que quando dizemos que a atividade matemática possibilita que o aprendiz experimente e aproxime o seu fazer matemático com o dos matemáticos profissionais, não estamos afirmando que o objetivo das investigações trabalhadas em sala de aula é o mesmo com o qual os profissionais da área fazem suas investigações. A investigação feita pelos matemáticos tem por finalidade avançar nas descobertas dessa ciência, ao passo que o trabalho investigatório proposto ao aprendiz objetiva levá-lo a construir atitudes, habilidades e competências matemáticas concretizadas na aprendizagem dos processos matemáticos envolvidos nessas atividades.

É possível que os alunos sintam dificuldades em trabalhar com esse tipo de atividade, pois para eles todo esse processo é novo. Ponte (2005b) afirma que a maioria dos alunos parece ter uma visão linear do trabalho a realizar, indo rapidamente da recolha à organização dos dados e desta à formulação de conclusões. Outras dificuldades dizem respeito a aspectos específicos do trabalho investigativo. Tomemos como exemplo, o momento de introduzir as questões que é um momento em que os alunos costumam não prestar muita atenção, pois as conjecturas são, algumas vezes, entendidas no início como conclusões, assim a necessidade de justificá-las não chega a ser compreendida por muitos deles. A sua finalidade natural é verificar por meio de vários exemplos, para que seja possível comprovar a validade de qualquer afirmação matemática. Contudo, com uma experiência demorada na realização de atividades de investigação, a maioria dos alunos consegue vencer essas dificuldades com sucesso.

Oliveira et al. (1997), apud Segurado (1997, p. 19) refere-se assim à importância educacional das atividades de investigação:

- 1) constituem uma parte essencial da atividade matemática e são, portanto essenciais para proporcionar uma visão completa desta ciência;
- 2) estimulam nos alunos o tipo de envolvimento necessário para que possa ocorrer uma aprendizagem significativa;
- 3) fornecem pontos de partida múltiplos para alunos de diversos níveis de competência matemática; e
- 4) estimulam um modo de pensamento globalizante, essencial no raciocínio matemático, relacionando muitos tópicos e estratégias de pensamento.

Acredita-se que as habilidades exercidas numa atividade investigativa vão além da aula de matemática. Afinal, como é sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

[...] a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e a justificação de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios (BRASIL, 2001b, p. 27).

Assim, é importante lembrar que as atividades em matemática devem provocar a capacidade de raciocínio, além de possibilitar o emprego de conceitos matemáticos para trabalhar com situações cotidianas, de modo crítico e reflexivo. Para que isto aconteça é preciso que haja uma mudança significativa em relação à metodologia utilizada pelo professor.

Esta prática contribui para que os alunos façam questionamentos sobre o seu espírito investigativo. Lembramos que o importante não é estabelecer regras, mas sim o envolvimento dos alunos com as tarefas realizadas por eles, pois eles aprendem quando trabalham os seus recursos cognitivos e afetivos para atingir um determinado objetivo. Isto é uma das características pedagógicas mais fortes da investigação, ao exigir do aluno a sua participação no processo, tendendo a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem.

Vários autores que trabalham com investigação matemática estabelecem critérios que podem ser observados quando o professor propõe uma atividade de investigação matemática. Em relação a isso, Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) esclarecem que,

uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (p. 25).

Em relação à fase de *introdução da tarefa*, é primordial que os alunos sintam-se familiarizados com este tipo de atividade, onde o professor procura envolvê-los de forma prazerosa no trabalho desenvolvido em sala de aula, propondo-lhes a realização de uma tarefa, através da distribuição da atividade escrita ou oral. O professor deverá deixar claro o que a atividade contém e explicitar o tipo de trabalho que quer desenvolver com as investigações e, por outro lado, criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos, de modo que esses alunos saibam o que está envolvido nessa investigação. Essa apresentação oral poderá ser feita por meio de uma leitura com a participação de todos os alunos, tendo em alguns momentos comentários do professor, caso necessário. Caso não haja a apresentação oral, o professor deverá dar um apoio maior junto aos alunos, tentando ajudar em relação ao que se pretende resolver.

Em particular, a realização de uma distribuição do enunciado da atividade por escrito parece ser uma boa estratégia para levá-los a melhorar a sua capacidade de argumentar e justificar os resultados matemáticos obtidos. Dependendo da clareza desse enunciado, o apoio do professor pode ser menor, fazendo com que esses alunos tenham mais independência em relação ao professor e em suas resoluções. Todavia, para que isso aconteça, é prioritário que os alunos aprendam o que significa investigar, pois essas atividades são diferentes das atividades que sempre foram desenvolvidas em outras situações do seu processo de aprendizagem escolar.

Nesta fase, o aluno deve mudar a sua concepção de aprender matemática, pois a partir daí ele não vai apenas fazer exercícios, mas formular as suas próprias questões, pois é o momento no qual há maior possibilidade de ocorrer aprendizagem. É fundamental que o mesmo perceba o que o professor quer que ele consiga absorver da atividade proposta, e perceber também que sua tarefa, no final, será compartilhada com seus colegas de sala. Finalmente, é importante ressaltar que o professor deve valorizar as idéias dos alunos, compartilhando-as também com os outros colegas de sala. Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) sugerem que essa fase de introdução da tarefa seja breve para não cansar o aluno, de modo que o mesmo venha a perder o interesse pela tarefa atribuída.

Na fase da *realização da investigação*, deve-se procurar centrar o trabalho na atividade do aluno, nas suas idéias e pesquisas. É preciso deixar o aluno aprender a lidar com o ato de investigar, para que ele possa ter maturidade para desenvolver sua tarefa no decorrer da pesquisa, sempre com a orientação e o estímulo do professor. Nessa fase, pode ocorrer uma grande inquietação por parte dos alunos, pois os mesmos podem não estar familiarizados nem com o processo de investigação, nem com a organização das idéias com grupos de alunos. É necessário recorrer sempre à ajuda do professor que, por sua vez, deverá fazer questionamentos para que, assim, estimule o poder de investigação por parte dos alunos, minimizando a chance de aparecer problemas maiores no decorrer da tarefa.

Pretende-se com isso, desenvolver, nos alunos, um comportamento investigativo, de modo que os mesmos consigam desenvolver ações questionadoras, analisar situações e formular conjecturas, sempre procurando explicações e argumentações para privilegiar as suas próprias idéias. Essa organização das idéias, geradas por grupos de alunos, ajuda na formação das idéias matemáticas, além de promover a criatividade, o raciocínio e a justificação matemática de suas afirmações. Durante o desenvolvimento das atividades é necessário que o professor observe se os alunos estão trabalhando de modo produtivo, formulando questões, analisando, testando e justificando conjecturas.

Finalmente, durante a fase de *discussão dos resultados*, os alunos precisam amadurecer suas idéias para que tenham clareza na hora de argumentar acerca de suas afirmações e dúvidas que porventura venham a surgir. É nessa fase que o aluno tem a oportunidade de refletir sobre a atividade.

A partir daí, o professor precisa desempenhar o seu papel de mediador, tentando fazer uma síntese das idéias dos alunos, fazendo com que os mesmos apresentem os resultados e argumentações das principais idéias de todo o processo da investigação realizada. É preciso, também, que o professor e os alunos já estejam bastante familiarizados com o trabalho em estudo, para que haja, no final, uma boa dinâmica de discussão. Nessa fase, os alunos podem aprender o significado de investigar, pois, até então, poderiam não estar acostumados a explorar e explicitar as suas idéias, uma vez que sem a explicitação das idéias, a tarefa pode perder o sentido de investigação.

Para que a discussão dos resultados seja realizada, é preciso fornecer um tempo para que os alunos a execute, muito embora, em alguns casos, seja necessário reorganizar esse tempo, dependendo da necessidade do aluno. Nesta fase, o professor deve procurar saber quais os possíveis resultados aos quais os alunos chegaram, se esses foram justificados e se geraram implicações importantes. Para isso, é necessário que o professor promova um diálogo com os alunos enquanto estes vão executando a atividade proposta, proporcionando a estes a oportunidade de refletir sobre a atividade e encorajando-os a discutir com o grande grupo, em sala de aula.

Enfim, o professor deverá oportunizar aos alunos uma aprendizagem significativa, seja ela individual ou coletiva, fazendo com que estes trabalhem sempre em sala de aula com tarefas que envolvem resolução de problemas e, principalmente, investigações. Para isso é preciso que todos estejam conscientes de seu papel nesse processo de ensino-aprendizagem, dando o máximo de atenção, entendendo que para aprender matemática é fundamental a colaboração e a cooperação entre professores e alunos.

Neste sentido, para trabalhar na perspectiva de realizar atividades de cunho investigativo, é necessário saber que essas não podem ser feitas em momentos pontuais. Elas devem fazer parte de um projeto de trabalho para ser desenvolvido freqüentemente. Assim, tais atividades poderão se constituir em uma estratégia de desenvolvimento do conhecimento do aluno e de desenvolvimento profissional do docente.

Para melhor compreensão do que foi exposto até o momento, passaremos no capítulo seguinte a demonstrar de que forma ocorreu a experiência com a investigação matemática.

CAPÍTULO 4 – AS EXPERIÊNCIAS COM INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA NA SALA DE AULA

4.1 O desenvolvimento das experiências

As duas experiências foram realizadas com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, durante o segundo semestre de 2006 e ao longo do ano de 2007. Para melhor esclarecimento, lembramos que a pesquisa foi realizada em dois momentos, com dois grupos distintos: o primeiro composto por estudantes que participaram da disciplina Fundamentos Epistemológicos da Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática, e o segundo com um grupo específico selecionado a partir da primeira experiência. De um modo geral, os alunos envolvidos apresentaram uma boa relação de afetividade com o corpo docente, e com os demais colegas de sala. Além disso, todos já estavam habituados a realizar trabalhos em grupo, apresentação de seminários, resultados de pesquisas bibliográficas, dentre outras atividades; mas não apresentavam nenhuma familiarização com investigação em sala de aula, nem com métodos diferenciados para ensinar os diversos conteúdos de matemática.

Convém esclarecer que, em todo o nosso estudo, adotamos a abordagem qualitativa de pesquisa que, de acordo com Bodgan e Biklen (1994), nessa investigação, as questões a serem investigadas são estabelecidas com o intuito de investigar o fenômeno em seus aspectos naturais, procurando descrevê-los de forma mais detalhada possível. Não são formuladas hipóteses que se pretendam testar, mas antes questões que orientam a pesquisa. Estes autores apresentam cinco características principais da investigação qualitativa e explicam que uma pesquisa pode ser considerada qualitativa mesmo que não apresente uma ou mais dessas características:

- A fonte direta de dados é o ambiente natural, sendo o principal instrumento de recolha o próprio investigador;

- Os dados recolhidos são descritivos e não numéricos, tendo a forma de palavras ou imagens;
- O investigador interessa-se, sobretudo, pelo processo, relegando para segundo plano os resultados;
- A análise dos dados é feita de uma forma indutiva, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias;
- Compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências assume uma importância vital.

Tendo já esclarecido o procedimento usado na pesquisa, detalharemos, a seguir, cada uma das experiências realizadas com os alunos de Licenciatura em Matemática.

4.2 A primeira experiência

A primeira experiência foi realizada no decorrer da disciplina *Fundamentos Epistemológicos da Matemática*, no segundo semestre de 2006, no turno matutino, com um grupo composto por doze (12) alunos regulares, dentre os quais sete (07) eram do sexo masculino e seis (06) do sexo feminino. Observamos, claramente, que houve uma boa distribuição desse grupo quanto ao gênero, pois 51% do total de estudantes são do sexo masculino e 49% do sexo feminino. Quanto à faixa etária do grupo, os estudantes tinham idades variando de 20 a 35 anos.

Para organizar melhor o trabalho, a turma foi dividida em três grupos, responsáveis pelos seguintes tópicos, sugeridos de acordo com a ementa da disciplina: sistemas numéricos, equações e funções. Conforme a orientação do professor da disciplina, os grupos deveriam elaborar um projeto de pesquisa sobre o assunto escolhido, de modo que fossem investigados os seguintes aspectos: desenvolvimento histórico-epistemológico, organização conceitual e atividades para ensino-aprendizagem. Em seguida, cada grupo subdividiu-se e cada aluno elaborou e desenvolveu um micro-projeto, abordando de forma mais específica seu tópico de pesquisa individual.

Nosso trabalho docente iniciou-se com a investigação das dificuldades dos alunos com relação ao conhecimento de sistemas numéricos, equações e funções no ensino fundamental e médio. Esta etapa consistiu em uma investigação exploratória realizada junto aos alunos do curso, visando identificar o grau de conhecimento dos mesmos acerca dos tópicos já mencionados, e suas conexões com as diversas áreas da matemática, bem como acerca do desenvolvimento histórico-conceitual desses tópicos. Nesse momento, criamos um ambiente de diálogo com os alunos na perspectiva de localizar as descontinuidades conceituais decorrentes de sua formação, considerando que a história da matemática poderia se constituir em um elemento de superação dessas dificuldades da formação, de modo que cada aluno, após sua investigação individual, pudesse levar ao grupo suas dúvidas e possíveis soluções para discussão (BEZERRA; ROCHA, 2007).

A realização dos micro-projetos de pesquisa constituiu-se na concretização da investigação histórica pelos alunos, buscando compreender os aspectos histórico-epistemológicos acerca dos conjuntos numéricos, dos métodos de resolução de equações e noções de função, bem como suas aplicações no ensino da matemática. Nessa etapa, os estudantes realizaram uma pesquisa bibliográfica sobre o desenvolvimento histórico dos diversos temas, de modo a construir sua própria aprendizagem sobre tais assuntos.

Durante a investigação em sala de aula, estavam presentes o professor titular da disciplina e duas pesquisadoras – que além de auxiliar, estavam já colhendo material para as pesquisas que seriam desenvolvidas a seguir. Os grupos foram orientados para que seus estudos apontassem sugestões de ensino desses tópicos a partir dos aspectos históricos investigados. Todavia, os alunos tiveram dificuldades no decorrer do trabalho, devido não terem desenvolvido autonomia para a investigação e elaboração própria de seus trabalhos ao longo do curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, o tempo disponível para tal ação formativa não foi suficiente, o que prejudicou o alcance pleno dos objetivos. Ao final do período letivo, cada grupo elaborou pequenas monografias envolvendo cada um dos temas de investigação e as mesmas foram apresentadas por meio de seminários de pesquisa.

A partir da divisão dos grupos, assumimos apenas a orientação dos trabalhos relacionados ao tema *equações do 2º grau*, abordado no ensino fundamental, cabendo os outros dois tópicos, sistemas numéricos e funções ao professor da disciplina e a outra pesquisadora envolvida no estudo. Nessa experiência, avaliamos uma proposta de ensino na qual foi adotado um método de investigação que enfatizou a pesquisa bibliográfica em história da matemática, tendo em vista a aprendizagem e/ou ressignificação dos fundamentos histórico-epistemológicos de um importante tópico matemático: equação do 2º grau, realizado por alunos da Licenciatura em Matemática da UFRN. Conforme mencionamos anteriormente, esse tópico foi escolhido a partir da ementa da disciplina Fundamentos Epistemológicos da Matemática, pois o mesmo é considerado importante para a matemática abordada no ensino fundamental.

No desenvolvimento dessa experiência foram considerados apenas alguns aspectos sobre o tópico já citado, em função de a carga horária disponível para o desenvolvimento das atividades ser restrita. Procuramos identificar e compreender as dificuldades dos alunos acerca de equação do 2º grau, visando testar uma proposta de superação de tais dificuldades a partir de uma pesquisa bibliográfica realizada em sala de aula como meio de construção do conhecimento dos estudantes de licenciatura, esperando, com isso, contribuir para a formação matemática dos futuros professores, objetivando melhorar sua atuação profissional.

De acordo com Ponte et al. (2005), as investigações matemáticas constituem uma das atividades que os alunos podem realizar com autonomia. Além disso, na disciplina de matemática, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental para a aprendizagem. Neste sentido, acreditamos que o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína.

De um modo geral, se os estudantes da Licenciatura em Matemática apresentam dificuldades acerca do ensino de equação do 2º grau, devido à falta de superação dessas dificuldades, podem levar as mesmas para o exercício docente quando passam a atuar em sala de aula. Nesse sentido, o estudo de textos relacionados ao desenvolvimento histórico desse tópico matemático e seus desdobramentos para o

ensino poderiam contribuir para que os futuros professores ampliassem a sua formação conceitual.

Tomamos, para isso, a proposta de Mendes (2005a, 2007) acerca da elaboração e utilização de textos de história da matemática como elemento de superação das dificuldades encontradas por professores de matemática, com relação aos conteúdos que ministram em suas salas de aula. Assim, foi possível contarmos com o suporte das informações históricas acerca do tópico selecionado de modo que tais informações pudessem contribuir para que os licenciandos ampliassem seu conhecimento a respeito de como ensinar matemática de modo que o ensino se tornasse eficaz. É importante que o futuro professor compreenda que diferentes épocas oferecem diferentes materiais didáticos ao ensino da história da matemática, os quais podem ser utilizados pedagogicamente em sala de aula.

4.2.1 A busca das informações na experiência

A partir das características da primeira experiência que nos propusemos a realizar, optamos pela investigação qualitativa, iniciando a busca das informações na aplicação de um questionário¹, o qual foi aplicado no final do semestre, entre os sujeitos pesquisados, que serão caracterizados na seqüência desse capítulo. O questionário foi elaborado por nós, conjuntamente com o professor da turma, contendo perguntas do tipo aberta que se caracterizaram por abordar perguntas ou afirmações que levam o sujeito a responder com frases ou orações, cuja formulação e ordem são uniformizadas, mas para as quais não se oferecem mais opções de respostas (RICHARDSON et al., 1999, p. 192). O instrumento conteve, também, perguntas do tipo semi-aberta, as quais permitiram respostas formuladas pelo próprio aprendiz, embora dentro de um contexto delimitado e explicitado na questão.

Em sua elaboração, tomamos como referência a investigação matemática como metodologia de ensino-aprendizagem para o desenvolvimento do conteúdo programático da disciplina Fundamentos Epistemológicos da Matemática. Além disso,

¹ O questionário utilizado pode ser encontrado no Apêndice A.

levamos em consideração a experiência em sala de aula. Com as respostas das questões, objetivamos avaliar o conhecimento prévio dos alunos em relação à investigação em sala de aula e como a nova metodologia de ensino-aprendizagem, envolvendo a história da matemática, contribuiu para a formação dos conceitos matemáticos estudados. Em nenhum momento houve a interferência por parte dos pesquisadores durante a aplicação do questionário.

4.2.2 Em busca da validação dos resultados da experiência

Ao longo do nosso estudo, percebemos e caracterizamos quais as dificuldades dos alunos e que concepções tinham com relação aos aspectos didáticos e conceituais acerca dos métodos de resolução de equações. Uma das etapas concernentes ao desenvolvimento do estudo investigativo referiu-se à elaboração e desenvolvimento de micro-projetos de pesquisa, que foram detalhados ao longo do estudo, centrados na investigação dos aspectos histórico-epistemológicos acerca dos métodos de resolução de equações. Nesta fase da experiência, cada componente do grupo fez seu micro-projeto abordando, de forma mais específica, seu tópico escolhido para investigar. Os alunos realizaram uma pesquisa bibliográfica sobre o desenvolvimento histórico dos diversos tópicos, de modo a construir sua própria aprendizagem sobre tais assuntos.

Com a análise de dados do questionário, percebemos que os alunos conseguiram expressar suas opiniões, tentando avaliar a experiência, de maneira informal, com relação ao ensino da matemática. Os estudantes envolvidos revelaram, a partir de suas respostas, que a mudança no método de ensino, priorizando a investigação matemática, é bastante significativa para o êxito da disciplina em estudo, pois facilita a compreensão do que foi ensinado ao longo do semestre, fazendo com que o aluno desenvolvesse mais autonomia em suas ações de busca do conhecimento dentro de sala de aula.

A seguir, mostraremos alguns depoimentos dos alunos participantes na aplicação do questionário², ou seja, o retorno de algumas questões respondidas:

² O questionário utilizado pode ser encontrado no Apêndice A.

essa metodologia mostra diferentes visões a respeito dos conceitos matemáticos, já que investigando, cada aluno fará sua interpretação.

(...) a metodologia usada foi muito proveitosa, pois trouxe uma participação do aluno com leitura e compreensão de texto que contribuiu para mudar nossa metodologia na sala ou avaliá-la.

(...) serviu principalmente para abrir a mente dos alunos a novas interpretações, mostrando a profundidade da matemática ao longo dos anos na história do mundo e como ela evoluiu.

(...) para mim foi muito bom, pois me levou a buscar, pesquisar, correr atrás de algo, me levou também a escrever, ou seja, construir um texto a partir de pesquisas efetuadas.

(...) ao investigar, os alunos tornarão agentes na construção do seu conhecimento e melhorarão sua participação em sala e até mesmo na sociedade, pois temos que formar seres questionadores e com capacidade ampla de enxergar alguma coisa.

(...) essa abordagem apresenta ao aluno uma matemática contextualizada, completamente diferente daquela apresentada na sala de aula pela maioria dos professores, dando-lhes liberdade de criação e, principalmente, de interpretação dos conceitos matemáticos. (Depoimento dos alunos).

Dessa maneira, podemos dizer que os resultados obtidos, no mencionado questionário, revelaram que esse procedimento de ensino, novo para eles, foi apoiado pelos alunos participantes dessa experiência, validando, portanto, a possibilidade de inclusão do mesmo no curso de Licenciatura em Matemática.

4.2.3 Os temas dos micro-projetos desenvolvidos

Para elaboração dos micro-projetos foram escolhidos temas relacionados à resolução de equações, objetivando que os participantes da experiência desenvolvessem estudos histórico-epistemológicos sobre cada um deles. Tais estudos versaram sobre resolução de equações na Antigüidade (Babilônia, Egito, China e Índia), bem como acerca dos métodos de resolução de equações do 2º grau gerados pelos matemáticos da Idade Moderna. A partir desses estudos, os alunos envolvidos na experiência elaboraram atividades de ensino para uso em sala de aula, tal como nos

sugere Mendes (2001a, 2005a, 2006b) em seus estudos envolvendo a investigação histórica para uso didático em sala de aula.

O tema de estudo gerou micro-projetos que, nesta etapa do estudo, foram desenvolvidos por cinco (05) alunos, participantes do grupo de estudo sobre equações do 2º grau. Os micro-projetos foram os seguintes:

a) Métodos de resolução de equações na Antigüidade (Egito e Babilônia):

Esse tema, desenvolvido por dois alunos, gerou um estudo que descreveu aspectos algébricos suscitados na matemática do Egito e da Babilônia, considerando as possibilidades de usos dos métodos de resolução de equações adotados na Antigüidade, nas aulas de matemática, ministradas atualmente;

b) Métodos de resolução de equações na China, na Índia e no mundo Árabe:

Esse tema, também desenvolvido por dois alunos, possibilitou a elaboração de um trabalho que buscou descrever e interpretar os métodos utilizados por chineses e árabes na solução de problemas envolvendo resolução de equações, considerando a possibilidade de usos desses métodos em sala de aula;

c) Métodos de resolução de equações presentes no livro: *Lectures on elementary mathematics*, de Joseph Louis Lagrange (1898).

Nesse trabalho, desenvolvido por apenas um aluno, foram discutidas as técnicas de resolução de equações de outras ordens. Nela, o autor discutiu as abordagens e métodos de resolução de equações de vários graus, propostas por Lagrange, visando apresentá-las em uma linguagem mais simples e atual para a sala de aula.

A realização dos micro-projetos, já citados anteriormente, constituiu-se na concretização da investigação histórica como alternativa para que os alunos pudessem compreender os aspectos histórico-epistemológicos dos métodos de resolução de equações, bem como suas aplicações didáticas no ensino fundamental.

4.2.4 As atividades desenvolvidas na primeira experiência

Na perspectiva de estudar as potencialidades pedagógicas do uso da investigação matemática em sala de aula, apoiada na história da matemática, na mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem, no momento de iniciação ao estudo de equações elementares, planejamos inicialmente os estudos investigativos que seriam desenvolvidos em sala de aula. Todavia, antes desse momento, tais planos de estudos foram levados para discussão entre o professor da disciplina e a professora pesquisadora. Levando em consideração a realidade do ensino público federal brasileiro, no caso, a Universidade Federal do Rio Grande do Norte, foram dadas várias sugestões de reformulação e adaptação do estudo, bem como várias recomendações, sobretudo por parte do professor da disciplina, de modo que o estudo feito em grupo adquiriu um caráter exploratório-investigativo, que tornou viável sua execução em sala de aula.

A organização de um estudo, partindo para o lado da investigação, é um processo no qual se aprende principalmente fazendo; devendo-se considerar que não há para isso um manual de receitas que ensine os passos para criá-las, sendo importante, entretanto, que se leve em consideração outros olhares. Com base nas informações obtidas nos estudos sobre os métodos de resolver equações, foi feita uma análise qualitativa da situação, com a finalidade de elaborar vários tipos de atividades, para uso em sala de aula e/ou laboratório.

4.2.5 Nossas considerações sobre a primeira experiência

A avaliação das atividades de ensino-aprendizagem foi efetivada por meio de um questionário³, bem como por meio de relatos orais e de conversas informais na sala de aula. Nesse momento foi possível perceber a aprendizagem, a satisfação e a opinião dos alunos em relação ao método de ensino adotado na turma, visando reorientar a proposta para outros alunos do curso de licenciatura em matemática.

³ O questionário utilizado pode ser encontrado no Apêndice A.

Percebemos também que os alunos apresentaram dificuldades em investigar o material histórico, pois a maioria não estava habituada a este tipo de estudo (pesquisa bibliográfica, por exemplo), sendo necessário desenvolvermos uma orientação mais sistemática, sobre a elaboração do micro-projeto e sobre a pesquisa bibliográfica, bem como indicando e fornecendo fontes de consulta e até alguns modos de como pesquisar na Internet. Diante desse quadro de dificuldades, foi necessário fornecer-lhes boa parte do material bibliográfico para que fosse possível alavancar o desenvolvimento do trabalho de pesquisa dos grupos. Mesmo assim, durante a apresentação de seus trabalhos, os alunos deixaram claro suas dificuldades em realizar as atividades investigativas. Assim, cada um apresentou e concluiu seu estudo demonstrando crescimento em relação à situação anterior aos estudos, alcançando, parcialmente nossos objetivos.

Na opinião dos participantes, a investigação histórica em sala de aula foi considerada uma abordagem eficaz, oportunizando maior autonomia, reflexão e reconstrução dos conceitos matemáticos de modo crítico e significativo. Nesse sentido afirmaram, que a experiência:

foi muito boa e indispensável para o bom andamento da aprendizagem. A reflexão sobre cada conceito, através do raciocínio nos torna um filósofo em busca de cada 'porque' para podermos justificar todo o desencadeamento dos conceitos matemáticos.

(...) interligou-se com objetivo de melhorar as aulas dadas atualmente [e] nos permitiu conhecermos como surgiram alguns assuntos da matemática, mas acredito que muitas coisas ainda ficaram sem entendimento, talvez por falta de bibliografias completas sobre os assuntos.

(...) O conhecimento adquirido foi bastante importante para o desenvolvimento acadêmico de cada aluno matriculado nessa disciplina. (Depoimento dos alunos).

Com base na avaliação da experiência, percebemos que a investigação histórica tem um potencial grandioso para o desenvolvimento de conhecimentos, habilidades e competências matemáticas que podem ser explorados, implicando em uma alternativa possível para implementação na sala de aula, havendo, assim, necessidade de

formalização e incorporação de uma proposta de ensino, na Licenciatura em Matemática, que contemple o exercício da pesquisa como princípio de construção da aprendizagem pelo aluno, futuro professor.

Os participantes da experiência afirmaram que a investigação histórica lhes trouxe oportunidade de refletir sobre os modelos de ensino adotados na sua formação, bem como a respeito do encaminhamento que poderão dar a sua prática no futuro, como professores. Para tanto afirmaram que:

a investigação contribui muito para entender como os conceitos matemáticos se desenvolveram em diferentes culturas, além de mostrar que o aprendizado é uma busca do aluno e não imposição do professor [e que] todos os métodos de abordagem descritos nos trabalhos dão subsídios às nossas [deles] próprias interpretações e assim a ciência evolui com o passar dos anos. {Além disso},

(...) Contribuiu para se conhecer assuntos que antes não tinham sido aprendidos; de onde e para que ocorrem as regras matemáticas dos assuntos estudados; a origem e os porquês e para que do conteúdo matemático estudado.

(...) Quando estudamos o passado mudamos nossa maneira de pensar de tal forma que em algumas coisas podemos enxergar a particularidade das coisas. (Depoimento dos alunos).

Outros participantes do mesmo grupo afirmaram, ainda, que

a experiência foi muito importante, pois a partir da abordagem histórica foi possível entender como o conhecimento foi construído através dos tempos, bem como as dificuldades com que os [matemáticos] se depararam para chegar a um resultado satisfatório. [Assim, concluíram que] a investigação histórica contribui para o aluno entender com mais facilidade e também perceber que qualquer que seja o assunto que se aprende/ensina não surgiu do acaso, como num passe de mágica, mas lentamente, pouco a pouco, dentro das necessidades e desafios que foram enfrentando ao longo dos tempos. (Depoimento dos alunos).

A partir das etapas realizadas no desenvolvimento do estudo, bem como os resultados obtidos, é possível apontar que as questões discutidas neste estudo são extremamente importantes para a formação inicial dos professores de matemática e,

conseqüentemente, para abordar a matemática com os estudantes do ensino fundamental. Além disso, se constituem em contribuições salutares para que os pesquisadores da área de Educação Matemática possam orientar-se acerca do que está sendo feito em relação ao tema objeto do estudo abordado por nós.

Durante a investigação histórica em sala de aula, o grupo foi orientado para que seus estudos apontassem sugestões de ensino do tópico estudado a partir dos aspectos histórico-epistemológicos investigados. Todavia, os alunos apresentaram dificuldades nessa tarefa, devido a não possuírem autonomia para o exercício da investigação e da elaboração própria. Além disso, o tempo disponível para tal não foi suficiente, em virtude do nível do grupo, o que prejudicou o alcance do nosso objetivo. Mesmo assim, ao final do período letivo, cada grupo elaborou pequenas monografias envolvendo cada um dos temas de investigação, as quais foram apresentadas sob a forma de seminários de pesquisa. Em suas apresentações, os alunos demonstraram ter avançado no conhecimento inicial sobre o assunto estudado, bem como boa segurança naquilo que era apresentado por eles.

A primeira etapa da pesquisa nos possibilitou perceber os níveis de dificuldades e de compreensão equivocada que os estudantes apresentaram com relação aos aspectos didáticos e conceituais acerca dos métodos de resolução de equações. Nesse sentido, é possível concluir que os diversos métodos de investigação matemática até agora trabalhados pelos estudantes, durante o desenvolvimento da experiência, apontam a importância didática de se buscar uma variedade de possibilidades metodológicas a serem oferecidas aos estudantes como forma de acionar seu processo cognitivo de aprendizagem nas atividades de sala de aula (BEZERRA; ROCHA, 2007).

Avaliando a experiência, verificamos alguns entraves encontrados pelos alunos para proceder a investigação histórica em sala de aula. Dessa maneira, reelaboramos nosso planejamento com vistas à realização de uma segunda experiência, partindo da investigação histórica. Porém, centramos mais tempo do que na primeira, em relação à investigação e aos aspectos matemáticos que estavam relacionados com o conteúdo histórico. Assim, pelos resultados obtidos nesse processo de avaliação, concluímos que a proposta foi avaliada, positivamente, pelos alunos envolvidos na experiência. Por isso, no sentido de constatarmos com mais segurança o crescimento desses alunos,

percebemos a necessidade de ampliarmos tal proposta através da reelaboração da mesma no ano seguinte, em 2007.

Embora tenhamos encontrado as dificuldades destacadas anteriormente, estas não nos impediram de realizar o trabalho de investigação. Ao contrário, isso nos instigou a prosseguir na investigação com o intuito de atingir os objetivos propostos; o que culminou com a obtenção de resultados satisfatórios.

Assim, afirmamos, então, que o processo de acionamento cognitivo da aprendizagem conceitual e didática dos alunos foi concretizado, pois consideramos que, nesse estudo, as ações investigativas eficazes nos estudos históricos contribuíram para a obtenção de resultados satisfatórios. Isso reforça cada vez mais o argumento favorável ao uso da investigação histórica como meio de ampliar a capacidade de compreensão conceitual dos professores e alunos.

4.3 A segunda experiência

A primeira experiência serviu de base para nossa tomada de decisão acerca de como encaminhar nosso estudo, o que gerou essa segunda experiência. A partir daí, entendemos que, para melhor compreender essa perspectiva metodológica, seria necessário uma ampliação desse estudo, criando assim um grupo de estudo a esse respeito, centrando a escolha nos elementos remanescentes da primeira experiência, trabalhando com eles no semestre seguinte, o que caracterizou essa nova experiência. Essa etapa do estudo foi realizada com o intuito de avaliar as dificuldades e a compreensão que esse grupo foi apresentando com relação aos aspectos didáticos e conceituais acerca dos métodos de resolução de equações do 2º grau, levando como base as atividades de investigação realizadas durante dois semestres, no ano de 2007, na segunda experiência.

A seleção para escolha dos participantes do grupo de estudo ocorreu por meio de um convite para os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN, que participaram da disciplina Fundamentos Epistemológicos da Matemática, remanescentes da primeira experiência, solicitando a participação deles nesse novo

momento. Ao ser estabelecido o dia da semana e o horário para a realização das ações investigativas, apenas quatro (04) alunas se dispuseram a fazer parte do referido grupo, sendo todas pertencentes à mesma turma, da referida disciplina. O critério de disponibilidade de tempo foi o elemento principal para a definição dos membros do grupo, posto que a maioria dos estudantes não dispunha de tempo para dedicar-se a esse tipo de atividade acadêmica.

Assim, o grupo de estudo foi composto por essas quatro alunas, todas na faixa etária variando entre 21 e 35 anos. Embora já tenhamos detectado que no curso de licenciatura em matemática há mais homens do que mulheres, percebemos que o interesse por estudos dessa natureza é mais aceito pelo sexo feminino, apesar dessa variável não ter sido objeto de nossa investigação.

A seguir faremos um breve relato da experiência da vida estudantil de cada uma das participantes do grupo de estudo, elencando algumas das características que as definem. Denominamos cada uma das alunas como Alfa, Beta, Gama e Delta, para preservar suas identidades.

- **Sobre a aluna Alfa**

Alfa é uma jovem aluna que demonstra facilidade no relacionamento com os outros, sendo bastante amável. Mostrou disponibilidade para falar sobre suas opiniões, seus conhecimentos e suas dificuldades, mesmo quando essas manifestações pessoais revelavam seus pontos fracos. Sempre alegre e comunicativa com todos, mostrou-se bastante entusiasmada com tudo que lhe era proporcionado. Iniciou o desenvolvimento do trabalho de investigação com um pouco de dificuldade, mas teve um avanço significativo ao término de sua tarefa, demonstrando disposição e vontade de crescer junto ao grupo durante toda a realização do estudo. Com a ajuda das colegas do grupo, foi evoluindo na elaboração e interpretação das atividades produzidas ao longo da experiência, apresentando um excelente desempenho no final do estudo.

- **Sobre a aluna Beta**

Beta sempre foi uma aluna dedicada, prestativa e entusiasmada com tudo de novo que aprendia. No início, mostrou-se apta a desenvolver um bom trabalho de investigação e continuou com excelente desempenho ao longo do processo. No ensino fundamental, percebeu que tinha um pouco de dificuldade em estudar disciplinas como história e geografia. Nestas disciplinas, foi orientada a fazer resumos, característica que predomina até hoje. Sempre teve um gosto especial por matemática. Recorda-se que, desde pequena, nos primeiros anos de escola, ficava triste quando falhava em alguma operação. Ao longo da sua escolaridade foi sempre bem sucedida nos estudos de matemática, fruto do seu gosto pela disciplina, mas também do seu empenho em ser boa aluna. Desde o início deste estudo, mostrou bastante afinidade com o trabalho investigativo, apresentando tranqüilidade e ânimo, assumindo uma postura de persistência e autoconfiança, tentando ultrapassar suas dificuldades. Sempre demonstrou um grau de facilidade, de autoconfiança e de segurança durante o desenrolar das atividades.

- **Sobre a aluna Gama**

Desde quando começou a estudar, a aluna Gama nos informou que sempre se familiarizou com a matemática, sempre teve mais facilidade em entendê-la, em detrimento às demais disciplinas. Cresceu sempre acreditando que iria para universidade estudar matemática. Admira muito o comportamento do ser humano e relacionou isto ao professor que consegue conviver com muitas personalidades ao mesmo tempo e consegue controlar sua turma em sala de aula. Valoriza a relação com as demais participantes do grupo e salienta, em vários momentos, a importância do trabalho e da reflexão conjunta. Mostra, ainda, determinação em alcançar os seus objetivos, mesmo que isso represente um esforço considerável da sua parte. Ainda que aparentando ser um pouco reservada, facilmente estabelece uma boa relação de amizade com os outros. No grupo de estudos ou no trabalho, é uma pessoa bastante

responsável e aplicada. Teve um crescimento extraordinário no decorrer do processo, causando grande admiração em todos.

- **Sobre a aluna Delta**

A aluna Delta nunca pensou em ser professora, pois achava que era muito tímida para isso, embora sempre tenha manifestado afinidade em relação à matemática e, por isso, tinha o melhor desempenho nessa disciplina. Já no ensino médio, obteve melhor êxito nos estudos, com boas notas em matemática, sem precisar de muito esforço. A opção em fazer o curso de Licenciatura em Matemática aconteceu mais tarde, quando finalmente entendeu que tinha afinidade para ser professora. Em alguns momentos deste estudo, chegava a ser uma pessoa bastante espontânea, que conseguia se comunicar facilmente, explicitando suas idéias e suas dificuldades. O seu nível de autonomia não era muito alto, sendo observado, em alguns momentos, um enorme sentimento de ansiedade, o que lhe levava a aceitar uma postura de observadora, procurando sempre o apoio do grupo. Também iniciou, com um pouco de dificuldade, o desenvolvimento do trabalho de investigação, mas teve um avanço significativo ao término de suas tarefas.

4.3.1 A busca das informações

As técnicas utilizadas para a obtenção de informações sobre a experiência seguiram as orientações da investigação qualitativa, centrando-se nas entrevistas, nos diários de registros e nas observações. A utilização destes diferentes instrumentos constituiu uma forma de obtenção de informações de diferentes tipos, o que proporciona maior acesso ao objeto estudado, bem como para melhor estabelecer comparações entre as informações. A seguir comentaremos cada um dos instrumentos anteriormente citados.

- **As entrevistas**

Nesta segunda experiência, foram usadas entrevistas semi-estruturadas, uma vez que consideramos que a condução da entrevista seguindo um roteiro básico de perguntas nos daria mais segurança, evitando a omissão de aspectos fundamentais. Estas entrevistas foram feitas em dois momentos, no decorrer da segunda etapa do estudo e abordaram essencialmente duas dimensões: o ensino, de um modo geral, e as atividades de investigação histórica dos aspectos matemáticos.

A primeira entrevista⁴ foi realizada no primeiro encontro com este grupo, ou seja, no dia 29 de março de 2007, antes do momento de prática, e teve como objetivo conhecer as experiências anteriores que esse grupo tinha com o ensino de uma maneira geral e com o ensino de matemática. Procuramos saber um pouco sobre a vida pessoal das participantes, tentando saber, também, se houve algum momento especial em suas vidas que as levou a escolher a profissão de professora, e quais seriam as alternativas de superação dos possíveis problemas que poderiam ter surgido com a escolha da profissão. Perguntamos, ainda, se depois que fizeram a opção pela docência, achavam que a disciplina de matemática era considerada difícil, e como seria possível trabalhar esse problema junto a classe discente. Finalmente, solicitamos que opinassem em relação ao ensino de matemática, indagando se teria havido mudanças significativas desde o tempo em que estudaram no ensino médio. Em nenhum momento fizemos interferência durante a realização da entrevista.

A segunda sessão de entrevistas⁵, realizada no dia 03 de maio de 2007, teve como objetivo perceber o grau de dificuldades e expectativas que cada participante tinha em relação ao trabalho com elaboração de atividades de natureza investigativa. Procuramos saber qual o principal motivo que levou o grupo a aceitar trabalhar com elaboração de atividades envolvendo investigação matemática, que dificuldades supunham que iriam enfrentar trabalhando com elaboração de atividades dessa natureza, quais as expectativas em relação a essa nova proposta de trabalho e,

⁴ A entrevista utilizada pode ser encontrada no Apêndice B.

⁵ A entrevista utilizada pode ser encontrada no Apêndice C.

finalmente, qual seria a maior preocupação em relação a todo esse processo. Também não houve nenhum momento de interferência durante a aplicação da entrevista.

Com essas entrevistas objetivamos, principalmente, perceber o tipo de evolução sofrida pelas alunas ao longo dessa experiência. Ponto esse que será analisado na seqüência deste estudo.

- **Os diários**

O diário foi considerado um dos principais instrumentos utilizados nesta etapa da nossa pesquisa. Cada componente do grupo reuniu em seu próprio diário todas as informações obtidas por meio de suas observações, registrando toda a descrição dos acontecimentos, levando em consideração suas reflexões, sobretudo o que se realizou, logo após a prática de cada encontro. É importante que essas anotações feitas no diário fossem as mais completas possíveis, descrevendo todo o conteúdo detalhadamente, mesmo que na forma de texto simples. Em relação a essa experiência, o diário da pesquisadora, que conduzia o trabalho com o grupo de estudos, foi utilizado, principalmente, para registrar o comportamento que esse grupo teve em relação aos encontros, bem como as expectativas, idéias, impressões, opiniões e dúvidas já existentes, causadas no decorrer da ação, proporcionando uma enorme contribuição na obtenção, registro, organização e posterior discussão das informações. Grande parte dos registros feitos no diário teve origem nos encontros semanais realizados, pois era no final desses encontros que o grupo se organizava para sintetizar as idéias que surgiam ao longo das discussões.

Os diários permitem fazer uma revisão dos elementos de seu mundo pessoal que sempre permanecem ocultos à sua própria percepção enquanto está envolvido nas ações cotidianas de trabalho (ZABALZA, 2004). De um modo geral, o diário representa uma fonte importante de dados e pode também ajudar a acompanhar o desenvolvimento do processo de pesquisa.

Combinamos que os diários pertencentes a cada participante do grupo deveriam ser entregues uma vez por mês, para que pudéssemos conhecer melhor o pensamento de cada uma a respeito das ações realizadas, suas angústias, seus anseios e,

principalmente, a maneira como esse grupo envolveu-se na realização de atividades de investigação em matemática.

- **As observações**

A observação se apresenta para o trabalho com investigação como uma importante técnica de obtenção de informação, pois contribuiu na determinação de aspectos informativos que, muitas vezes, não são obtidos por meio de outras técnicas. Assim, nossas observações foram realizadas informalmente, ao longo dos encontros, a fim de não perder os aspectos informativos mais importantes. Estas observações foram escritas no diário, de forma clara, pela pesquisadora, levando em consideração a forma como o grupo organizava o tempo, a metodologia e, também, como esse grupo reagiu e se envolveu nas atividades. Essas observações, posteriormente, viraram objeto de discussão, incluindo sempre uma autocrítica por parte de cada participante. Em nenhum momento dessa experiência nossas observações foram motivos de perturbação perante o grupo, pois nossa relação informal ajudou muito no andamento do processo.

4.3.2 Os encontros e o local

Nossos encontros foram realizados durante todo o ano de 2007, na oficina de matemática, localizada no setor de aulas da UFRN, onde contamos com a participação do grupo de estudo, composto pelas quatro (04) alunas anteriormente citadas. Esses encontros foram realizados semanalmente, sempre nas quintas-feiras, no horário matutino, com a duração de duas horas, das 9h45 às 11h45. Esse horário foi escolhido em comum acordo, com todas as participantes do grupo de estudo.

Nesses encontros, decidimos que o grupo trabalharia com alguns dos aspectos teóricos da história da matemática, como leitura e interpretação de textos da história das equações do 2º grau e, também, atividades de investigação matemática, de modo que esse grupo tivesse contato com alguns dos aspectos fundamentais da atividade de investigação matemática, tais como: observar, pesquisar, conjecturar, validar e

justificar. Esse procedimento, certamente colaboraria para a melhoria da compreensão do que vem a ser de fato esse tipo de atividade. A maior parte do que ocorreu nesses encontros foi registrado nos diários, material esse que serviu principalmente como material de avaliação e validação desta experiência.

O primeiro encontro aconteceu no dia 29 de março, no qual foi feita a primeira entrevista⁶ individual, quando o grupo respondeu cada questão de maneira espontânea. Conversamos um pouco a respeito do modo como seriam realizados os demais encontros.

No segundo encontro, no dia 12 de abril, lemos e discutimos questões que envolviam métodos de resolução de problemas em matemática, tendo ficado como tarefa para o próximo encontro a elaboração de uma síntese do texto⁷ de Skemp, 1980, relacionando as idéias nele contidas com a história da matemática, tendo como finalidade as aplicações de resoluções de problemas em sala de aula. Fizemos uma discussão rápida sobre a leitura do texto e chegamos à conclusão que este era importante para a aprendizagem da álgebra, principalmente a respeito de equação do 2º grau.

No encontro do dia 19 de abril, iniciamos com a retomada da discussão sobre o texto lido e discutido no encontro anterior. Tiramos algumas dúvidas do grupo e falamos sobre as dificuldades encontradas na leitura do mesmo. Apresentamos para o grupo alguns textos⁸ de Frago, 1999; Joseph, 1991, dentre outros, que tratavam sobre equações do 2º grau e métodos desenvolvidos por várias civilizações antigas. Discutimos parte dos textos, mas resolvemos terminar a leitura em casa, pois o tempo do encontro já havia se esgotado.

No quarto encontro, no dia 26 de abril, retomamos a leitura do texto sobre métodos de resolução de equações na antiguidade. Sugerimos que cada aluna começasse a pensar de que maneira poderia elaborar uma atividade de investigação, pesquisando outros textos que tratassem dos vários métodos de resolução de equação do 2º grau.

⁶ A entrevista utilizada pode ser encontrada no Apêndice B.

⁷ Ver Referências.

⁸ Ver Referências.

No dia 03 de maio, aplicamos nossa segunda entrevista⁹ em relação às atividades de investigação em matemática. Conversamos um pouco sobre os tipos de atividades aplicados em sala de aula.

No dia 10 de maio não houve encontro, pois o grupo estava participando de atividades extras, relacionadas ao presente estudo, como, por exemplo, pesquisa bibliográfica sobre métodos de resolução de equações em diversas épocas da história e atividades investigativas para sala de aula.

No dia 17 de maio, fizemos a leitura e discussão do texto¹⁰ “*Investigação sobre as atividades de investigação, o professor e a aula de matemática*”, que trata da investigação e atividades de investigação matemática, com a intenção de tornar mais claras as idéias sobre esse tema. No final do encontro, partimos para uma discussão sobre uma atividade que duas alunas do grupo elaboraram juntas, mas chegamos à conclusão que a atividade não era investigativa, pois não atendia aos requisitos necessários.

No dia 24 de maio, conversamos sobre as angústias que cada participante estava sentindo, pois todas estavam preocupadas porque tentaram elaborar atividades investigativas e não conseguiram. Resolvemos esclarecer alguns pontos sobre atividades dessa natureza, alguns que ainda não tinham sido bem definidos. Pedimos às componentes do grupo que fizessem algumas leituras de textos, tendo como referencial teórico Segurado (1997), Oliveira (1998), Mendes (2005a), Ponte (2005b), entre outros, sobre investigação matemática, atividades de investigação e história no ensino da matemática.

No dia 31 de maio, percebemos que a leitura de alguns textos sugeridos contribuiu para a melhoria da compreensão das alunas do grupo em relação às idéias referentes à investigação, pois duas alunas mostraram uma atividade de investigação que conseguiram elaborar juntas no período entre o último encontro e o atual. Elas conseguiram elaborar uma atividade investigativa, sem envolver a história da matemática e queriam, principalmente, saber se tinham conseguido atingir o objetivo de uma atividade dessa natureza.

⁹ A entrevista utilizada pode ser encontrada no Apêndice C.

¹⁰ O texto utilizado pode ser encontrado no Anexo A.

Conversamos sobre a atividade e chegamos à conclusão que atendia aos objetivos propostos. Voltamos a discutir sobre as dificuldades encontradas na elaboração de atividades de investigação matemática e percebemos um grande avanço em todo o grupo, como relata o depoimento de uma das alunas:

O estudo hoje foi ótimo, acho que agora “pegaremos o embalo”. Se Deus quiser estaremos com muitas atividades prontas em breve. O fato de discutirmos [nossas dificuldades] nos abriu até horizontes pra nossa própria maneira de ver a tarefa quando a fazemos sozinhas e as informações trazidas de cada uma, mesmo em relação à equação do 2º grau, também acabou somando. Vamos nessa! (depoimento da aluna delta)

Antecipamos o encontro do dia 07 de junho para o dia anterior, pois esta data seria feriado. Neste dia, mais uma aluna trouxe uma atividade e começamos a fazer a leitura avaliativa da mesma, em conjunto. No final, percebemos que a atividade deveria ser melhor organizada, pois encontramos algumas falhas na distribuição das questões.

No dia 14 de junho, o grupo apresentou muitas dúvidas e muitas angústias, pois as alunas tentaram elaborar outras atividades sem obter sucesso. Diante desse fato, decidimos parar e rever alguns detalhes que permaneciam despercebidos. Depois disso, as componentes do grupo recuperaram o ânimo e manifestaram esperança de conseguir fazer alguma coisa até o próximo encontro.

O encontro do dia 21 de junho se configurou em um momento de satisfação e alegria para todas as alunas, pois o grupo conseguiu reelaborar a atividade que foi apresentada no dia 07 de junho, atendendo a todas as exigências estabelecidas. Avaliamos a atividade, chegamos ao consenso de que estava em plenas condições de ser aplicada, por apresentar objetivos bem definidos e encaminhamento didático de acordo com os pressupostos técnicos sobre investigação, mencionados nos capítulos anteriores desse estudo.

A partir desse momento, decidimos que os encontros, antes realizados semanalmente, se efetivariam de acordo com as necessidades, ou seja, sempre que fosse necessário apresentar as atividades elaboradas pelo grupo para avaliação

conjunta ou para solução de dúvidas de alguma componente da equipe. A partir daí o grupo evoluiu de forma significativa no que se refere à elaboração de atividades.

Os resultados foram bastante significativos, pois conseguimos ver cada participante satisfeito por ter conseguido minimizar as dificuldades que antes eram tão visíveis. Trabalhamos com muita determinação nessas atividades e encontramos alguns problemas, os quais foram sanados no decorrer do processo.

4.3.3 Elaboração das atividades com o grupo de estudo

Passamos agora a descrever, com detalhes, os encontros em que o grupo de estudo elaborou as atividades de investigação matemática num contexto de trabalho de grupo. Descrevemos os diversos momentos desses encontros, partindo desde o princípio, quando foram estabelecidos estudos de textos até a fase de discussão dos resultados obtidos durante o processo de elaboração das atividades de investigação. Mostraremos, de forma clara, os aspectos mais importantes dessa etapa vivenciada pelo grupo, no que se refere aos processos matemáticos que envolvem os diversos métodos de resolução de equações e as dificuldades que as alunas sentiram durante todo o processo de elaboração.

A elaboração das atividades foi realizada no ano de 2007, com início em março do referido ano, tanto no local dos encontros, como também fora dele, mediante longo estudo sobre as atividades de investigação em matemática, métodos de resolução de equações do 2º grau e a história da matemática como estratégia de ensino-aprendizagem. A princípio o grupo apresentou grandes dificuldades para elaboração dessas atividades. Foram necessárias várias intervenções da nossa parte. Em alguns momentos, o grupo chegou a pensar que não daria certo, que não iria conseguir obter avanço. Essas atividades, nem sempre foram definidas de imediato, tendo o grupo necessitado, por vezes, de bastante tempo para elaborá-las. O motivo desse atraso deveu-se, principalmente, ao pouco conhecimento que as alunas tinham a respeito de atividade de natureza investigativa, envolvendo o conhecimento histórico-epistemológico do assunto.

Durante a elaboração das atividades, tentamos limitar o apoio, só o fazendo discretamente, dando total autonomia de ação ao grupo de estudo, mas nem sempre isso foi fácil, pois era complicado saber qual o momento certo para interceder. Em diversas situações dessa elaboração, realizamos discussões conjuntas, com o propósito de fornecer ao grupo uma visão geral do trabalho em andamento. Fizemos leituras de alguns textos que versavam sobre investigação matemática em sala de aula, e história da matemática, na intenção de levar as alunas a refletirem sobre o significado de investigação e estabelecer relação com a história. Várias vezes discutimos a respeito das fases de uma investigação matemática, tentando minimizar as possíveis dúvidas e dificuldades do grupo.

Durante a execução das atividades, decidimos explicar mais detalhadamente o que era solicitado, procurando ajudar as alunas no que se refere à interpretação da atividade elaborada, mostrando a importância de saber explorar as situações que estão envolvidas, questionando de forma a estimular a curiosidade e conduzi-las a enxergar melhor todo o processo investigativo contido na atividade.

A seguir, apresentamos uma discussão sucinta das atividades, tendo como foco sua aplicabilidade em sala de aula, elaboradas por esse grupo de estudo.

Atividade 1: Investigando e aprendendo

O objetivo dessa atividade¹¹ é fazer com que o aluno conheça a equação do 2º grau, através do ensino de equação do 1º grau. A atividade tem como ponto de partida a definição de equação. Na questão 1, o aluno interpretará a definição e observará se os elementos nela citados são encontrados na sentença dada, ou seja, ele observará se a sentença satisfaz a definição. Na questão 2, comparando uma sentença já conhecida (equação do 1º grau) com a sentença dada, ele deverá citar as diferenças e semelhanças, identificando assim características próprias da sentença dada. Na questão 3, através das semelhanças e diferenças observadas, o aluno, de posse de várias sentenças, irá separar em grupos as que se assemelham. Acreditando que aluno

¹¹ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice D.

identificou semelhanças e diferenças entre a equação do 1º grau e a sentença dada, pede-se que ele dê um nome para a sentença dada.

Atividade 2: De onde veio essa fórmula?

O objetivo dessa atividade¹² é resolver equações do 2º grau, destacando a importância dos métodos desenvolvidos por outras civilizações, pois foi através da interpretação de procedimentos usados por antigas civilizações, que hoje resolvemos equações usando uma linguagem simbólica adotada pela álgebra. No item 1 o aluno irá aplicar as regras da solução hindu na equação dada. No item 2 fará uma comparação entre o que encontrou no item 1 e a fórmula de Bhaskara e, no item 3, ele deverá concluir de onde veio essa fórmula. Ao final da atividade o aluno encontrará as raízes de uma equação seguindo a regra hindu. É importante destacar que, para resolver uma equação pelo método hindu, o aluno precisa do conhecimento de produtos notáveis, ou seja, ele terá uma forma de encontrar as raízes de uma equação sem que seja preciso “decorar” a fórmula de Bhaskara.

Atividade 3: A fórmula hindu

O objetivo dessa atividade¹³ é resolver equações do 2º grau. Nela o aluno pode perceber que antigos matemáticos hindus já usavam uma fórmula para resolver equações. O conhecimento prévio para o desenvolvimento dessa atividade é a fórmula de Bhaskara, pois a atividade consiste em resolver equações usando a fórmula hindu e a fórmula de Bhaskara, para que encontrando as mesmas raízes o aluno perceba que há uma correspondência entre essas duas fórmulas. Ao final da atividade, o aluno, através de manipulações algébricas feitas na fórmula hindu deverá chegar na fórmula de Bhaskara.

¹² A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice E.

¹³ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice F.

Atividade 4: Não perca o zero

O objetivo desta atividade¹⁴ é resolver equações do 2º grau incompletas. Nessa atividade o aluno pode perceber o avanço da matemática através da solução de equações incompletas antes e depois da invenção do zero. O conhecimento prévio para a realização dessa atividade é fatoração, e ao final dela o aluno resolverá equações incompletas encontrando duas raízes, sendo uma delas o zero.

Atividade 5: Olhando o delta

O objetivo desta atividade¹⁵ é analisar as raízes da equação através da análise da fórmula de Bhaskara. O ponto de partida é um problema babilônico. Os escribas babilônios não conheciam os números negativos e, ao extrair a raiz quadrada, encontravam uma só raiz. No primeiro item da atividade, usando o conhecimento de radiciação, o aluno resolverá a mesma equação do problema babilônico, encontrando agora as duas raízes, uma positiva e outra negativa. No item 2, usando ainda esse conhecimento, ele entenderá melhor os dois sinais existentes antes da raiz do delta na fórmula de Bhaskara. E, finalmente, no item 3, através da análise do delta, saberá como serão as raízes de uma equação.

Atividade 6: A primeira fórmula

O objetivo desta atividade¹⁶ é resolver equações do 2º grau completas. Nela o aluno terá a oportunidade de conhecer a primeira fórmula resolutive da equação do 2º grau. Aplicando essa “primeira fórmula” e a fórmula de Bhaskara na equação dada, o aluno encontrará uma mesma raiz, mas a equação tem duas raízes. No final da atividade ele deverá perceber que há uma diferença entre as duas fórmulas e fará uma análise dos coeficientes usados na “primeira fórmula” e os usados na fórmula de Bhaskara.

¹⁴ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice G.

¹⁵ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice H.

¹⁶ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice I.

Atividade 7: Completando quadrados 1

O objetivo desta atividade¹⁷ é encontrar as raízes de uma equação do 2º grau completando quadrado pelo método geométrico, fazendo uma conexão com a história da matemática. O ponto de partida é o uso do método geométrico de Euclides em um problema de Al-Khowarizmi. Ele não conhecia os números negativos e, ao extrair a raiz quadrada, encontrava uma só raiz. No primeiro item da atividade, usando o conhecimento de área, o aluno completará o quadrado geometricamente, usando também a álgebra, e entenderá como fez Al-Khowarizmi, encontrando somente uma raiz. No item 2, encontrará as duas raízes usando o mesmo método. E por fim, no Item 3, terá um exercício de fixação relacionado aos itens anteriores.

Atividade 8: Completando quadrados 2

O objetivo dessa atividade¹⁸ é resolver equações do 2º grau completas, completar quadrado, fixar a extração de raiz quadrada e proporcionar revisão das operações com números decimais. Nela o aluno pode perceber que antigos matemáticos não precisavam usar a fórmula de Bhaskara para resolver equações do 2º grau. Os conhecimentos prévios para o desenvolvimento dessa atividade são: produtos notáveis, radiciação e decomposição em fatores primos. O contexto histórico indica o caminho principal para a resolução das equações, ou seja, pelo método de completar quadrado. No item 1, o aluno deverá completar quadrado pelo método de Al-Khowarizmi, conforme o exemplo dado. No item 2, ele irá completar quadrado e reduzir à forma do produto notável conforme exemplo, e por fim encontrar as duas raízes reais e, finalmente, no item 3, deverá perceber que a equação não têm raízes reais.

Atividade 9: Completando quadrados 3

O objetivo desta atividade¹⁹ é classificar as equações do 2º Grau e identificar a equação fora do contexto de algoritmo, e ainda colocar o aluno em contato com os

¹⁷ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice J.

¹⁸ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice K.

¹⁹ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice L.

termos como raiz, quadrado, área e termo independente. A atividade tem como ponto de partida a própria equação do 2º grau, pressupondo que o aluno já a conheça (observando o grau do polinômio) e a linguagem usada por Al-Khowarizmi para cada termo da equação, destacando a importância de outras civilizações. Na questão 1, o aluno irá perceber a equação geométrica, algébrica e retoricamente e ainda trabalhar com os termos raiz, número (termo independente) e quadrado (área). Na questão 2, comparando as equações encontradas, ele deverá ser capaz de citar as equações dos tipos completas e incompletas e ainda pode chegar a classificá-las, segundo Al-Khowarizmi, como sendo cada uma das equações encontradas um tipo de equação do 2º grau.

Atividade 10: O x da questão

O objetivo dessa atividade²⁰ é resolver equação do 2º Grau incompleta, identificar a solução adequada de um problema matemático como, por exemplo, o fato de a raiz referente a um lado de um quadrado ser a raiz positiva e desenvolver métodos para aproximar raiz quadrada. É no contexto histórico que o aluno encontrará o embasamento necessário para a realização da atividade. No item 1, o aluno deverá ser capaz de aproximar o valor da raiz pelo método que achar conveniente e deduzir que, como o problema se refere ao lado de um terreno, considera-se apenas a raiz positiva. No item 2, fará registro de sua descoberta, levando em consideração, se for o caso, outra civilização e, finalmente, no item 3, ele irá exercitar o método encontrado para aproximar a raiz (achará as duas raízes), reforçando a interpretação matemática dada neste caso, lado de um quadrado e raízes de uma equação, e por fim saberá como encontrar a raiz de uma equação incompleta do tipo quadrado e termo independente.

Atividade 11: Duas vezes procurado

O objetivo desta atividade²¹ é resolver equações do 2º grau incompletas. Nesta atividade o aluno pode perceber o avanço da matemática através da solução de

²⁰ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice M.

²¹ A atividade utilizada pode ser encontrada no Apêndice N.

equações incompletas antes e depois da invenção do zero. O conhecimento prévio para a realização dessa atividade é fatoração e, ao final dela, o aluno resolverá equações incompletas encontrando duas raízes, sendo uma delas o zero. Na questão 1, ele deve identificar por que não encontrou a raiz $x = 0$ e, na questão 2, achar as duas raízes por meio de fatoração. Sabendo que é necessária uma interpretação matemática antes de resolver um problema matemático, o contexto histórico traz para o aluno dicas como: $x^2 - 2x = 0$ quer dizer $a \cdot b = 0$ ou $a = 0$ ou $b = 0$ e $x^2 = 2x$ quer dizer que o número é tal que seu quadrado é igual ao seu dobro.

4.3.4. Sobre as dificuldades apresentadas pelo grupo e a atividade de superação dos obstáculos surgidos

O grupo já apresentava várias dificuldades no que diz respeito à elaboração de atividades envolvendo investigação matemática, mas principalmente envolvendo a história. Ficou evidente, em alguns momentos, o desempenho de uma das alunas, que mostrou mais capacidade de trabalhar com investigação, no momento em que procurou explicitar suas argumentações em relação à primeira atividade. Em várias situações, observamos que essa aluna sempre tinha o cuidado de explicar, às demais participantes que tinham dificuldades, os procedimentos que deveriam ser realizados. De um modo geral, constatamos muitas dificuldades no início do estudo, como relatam as alunas em seus diários:

(...) no início do nosso estudo, estava muito confusa. Apesar de entender o que é uma atividade de investigação, eu não conseguia elaborar nenhuma.

(...) quando as meninas começaram a elaborar as suas atividades, comecei a perceber que não era tão difícil quanto eu imaginava e com a evolução do trabalho comecei a me empolgar mais, e mesmo sem conseguir elaborar nenhuma atividade, conseguia dar contribuições para melhorar as atividades que já estavam em andamento. (depoimento da aluna alfa)

(...) entendia claramente o que era uma atividade investigativa, mas durante várias semanas tentei elaborar uma e não consegui. Senti-me muito mal, mas não a ponto de desistir de tentar. (...) desde que comecei a ler os textos sobre investigação matemática acreditei que conseguiria elaborar várias atividades,

mas não foi como eu pensei. (...) certo dia resolvi iniciar novamente todas as leituras dos textos estudados e fui fazendo anotações, neste dia consegui elaborar uma atividade, e a sensação que tive era de uma “alavancada” e por isso pensei “agora sim, elaboro várias atividades”. No dia seguinte elaborei mais duas. (depoimento da aluna beta)

(...) estou adorando trabalhar com investigação matemática, mesmo ainda não tendo conseguido avançar muito. Acho que a dificuldade que eu estou sentindo é em saber ainda conectar história e investigação, mas em breve conseguirei fazer isso, acho que é só uma questão de tempo. (Depoimentos da aluna gama)

O grupo apresentava um melhor desempenho no momento de conhecer e desenvolver as atividades elaboradas. Isso era visível durante a realização dos encontros em que se tentava desenvolver atividades dessa natureza.

Durante o processo de elaboração das atividades desenvolvidas pelo grupo, fomos muito solicitados no sentido de poder esclarecer o que era pretendido em determinadas questões, auxiliando na organização e sistematização das informações que já tinham adquirido gerando, assim, o bom funcionamento do grupo.

No processo de discussão das atividades, observamos o comportamento do grupo e percebemos que uma das alunas comentou: *Tenho certeza que não vou conseguir elaborar nenhuma atividade. Não consigo trabalhar ainda com investigação matemática, utilizando a história.* Nesse momento, resolvemos não interferir em seus anseios, esperando que, de alguma maneira, isso viesse a se modificar ao longo do processo. De fato, a aluna conseguiu um bom desempenho no final de toda a experiência de elaboração das atividades.

As discussões referentes ao processo criativo das atividades foram sempre consideradas significativas e de grande importância para a formação do grupo, pois trazia ânimo para todas as alunas que ainda não tinham conseguido elaborar nenhuma atividade, levando-as a perceber o que realmente se pretendia fazer para elaborar uma atividade de investigação.

Decidimos explicar mais detalhadamente o que era solicitado nas atividades elaboradas pelo grupo, procurando ajudar as alunas no que diz respeito à leitura da atividade elaborada, mostrando a importância de saber explorar as situações que estão

envolvidas, questionando de forma a estimular a curiosidade e conduzi-las a perceber todo o processo investigativo contido na atividade.

Em um determinado momento, observamos que uma das alunas estava quieta, e resolvemos perguntar-lhe o que estava acontecendo. Ouvimos, então, a seguinte explicação:

para mim é muito difícil elaborar atividades de investigação envolvendo história da matemática, pois, normalmente ao criar atividades faço adaptações de algumas já existentes. Mas atividade de investigação não tem exemplos fáceis de encontrar, principalmente envolvendo história da matemática. Para isso, é necessário ter um maior conhecimento da história, do assunto da matemática que se quer trabalhar. (...) acredito que quando se faz algo é para alguém, e devido a pouca experiência não sei como devo abordar o assunto. Ao trabalhar com investigação principalmente para adolescente tem que ter muito cuidado para não perder o controle da turma, abordar bem o assunto para que eles não tenham dificuldade em entender o que é pedido. A forma de abordar tem que fazer sentido para quem se destina. Portanto por esses e outros motivos me sinto incapaz de elaborar as atividades. (Depoimentos da aluna gama)

Nesse momento sentimos a necessidade de conversar um pouco mais com o grupo e mostrar que é possível elaborar atividades de investigação, envolvendo a história.

Após a elaboração do bloco de atividades, percebemos que seria bastante salutar fazermos algum tipo de testagem das atividades.

4.4 Testagem das atividades investigativas

Passamos agora a expor alguns momentos que consideramos importantes nesse estudo, onde as componentes do grupo, juntamente com a pesquisadora, fizeram a testagem das atividades elaboradas ao longo do estudo. Procuramos apresentar, de forma breve, as dificuldades que os alunos sentiram durante a resolução das atividades.

A testagem das atividades foi realizada em duas etapas, no segundo semestre de 2007. A primeira testagem foi realizada em sala de aula, com treze (13) alunos da disciplina *Estágio Supervisionado*, do curso de matemática da UFRN, e a segunda com os trinta e cinco (35) participantes do mini-curso intitulado “Ensino de matemática a partir de atividades estruturadas”, oferecido na XIX Semana de Matemática, realizada no Campus da UFRN, no período de 12 a 14 de novembro de 2007.

4.4.1 Sobre a primeira testagem

A primeira testagem foi dividida em dois momentos: o primeiro momento serviu para a apresentação por escrito das atividades de investigação e para a resolução das mesmas e o segundo momento, realizado na semana seguinte, foi útil para fazermos comentários a respeito da resolução das atividades.

Iniciamos, no primeiro momento, fazendo uma pequena explanação sobre atividades de investigação e qual a sua importância no ensino, em seguida fizemos a leitura das mesmas. Os alunos foram distribuídos na sala, resolvendo as atividades, individualmente. O início desse processo de resolução foi marcado por algumas dificuldades, uma vez que os alunos não estavam acostumados com esse tipo de abordagem didática. Assim, resolvemos fazer algumas considerações para toda a turma, fornecendo orientações para o entendimento dessa proposta. Uma vez ultrapassada as dificuldades iniciais, verificamos que alguns alunos ainda não tinham conseguido compreender a parte histórica contida nas atividades. Diante dessa situação, decidimos que seria conveniente insistir em alguns aspectos relacionados ao uso da história da matemática como recurso didático em sala de aula.

Alguns alunos estavam com algumas dificuldades em sistematizar os resultados encontrados em algumas atividades. No sentido de ajudá-los na organização de suas idéias, decidimos tentar fazer uma síntese das atividades que já tinham desenvolvido até então. Começamos a fazer questionamentos aos alunos, a fim de perceber se todos estavam envolvidos na investigação atual e se partilhavam das mesmas dúvidas. A discussão foi bem estruturada, os alunos conseguiram envolver-se com as atividades e,

a partir daí, percebemos que nossa ação, de certa forma, foi influenciada pela agitação dos alunos.

De um modo geral, os alunos revelaram boa autonomia em relação às atividades propostas. Este fato foi evidenciado pelo mínimo de vezes que solicitaram a nossa presença, principalmente no que diz respeito à validação de suas respostas e esclarecimento do que era pretendido nas atividades. Na maioria das questões, os alunos revelaram ter pouco costume na realização de investigações e, na tentativa de diminuir esse problema, procuramos ajudar os alunos em possíveis explorações de idéias novas. Os alunos fizeram essa observação, também em relação aos alunos do ensino fundamental, pois eles também não estão habituados a trabalhar com investigação.

Observamos um avanço na maioria da turma, pois os alunos estavam trabalhando em ritmos acelerados, empenhando-se nas investigações com bastante entusiasmo, apresentando uma certa preferência por esse tipo de trabalho. Percebemos que dois (2) alunos não pareciam estar muito motivados para resolver as atividades de investigação matemática. Não conseguimos descobrir se o motivo era por causa de alguma dificuldade ou se era por pura falta de interesse. Insistimos com esses alunos no sentido de fazermos questionamentos de forma a estimular a curiosidade e conduzi-los a uma investigação. Observamos que, no final, eles aceitaram de forma parcial trabalhar com investigação matemática.

No final da primeira testagem, sentimos a necessidade de fazer pequenos ajustes em algumas atividades que apresentaram pequenos problemas de compreensão, modificando o tipo de linguagem usada anteriormente, passando a usar outra mais acessível aos alunos do ensino fundamental, e incluindo também as sugestões dos alunos participantes da 1ª testagem, tais como a incorporação de novos textos históricos e, até mesmo a inclusão de novos conhecimentos prévios. Procuramos fazer todas as modificações necessárias nas atividades para podermos aplicá-las de maneira mais refinada na próxima testagem.

4.4.2 A respeito da segunda testagem

A segunda testagem foi realizada junto ao grupo de estudo em um só momento, com duração de (4) quatro horas, com alunos e professores na área de matemática, no total de (35) trinta e cinco pessoas. A apresentação das atividades foi análoga à primeira testagem, sendo esta organizada em pequenos grupos, de acordo com o grau de afinidade dos participantes.

O início da resolução das atividades investigativas também foi marcado por algumas dificuldades, pelo mesmo motivo da primeira testagem: os alunos não estavam acostumados com essa abordagem didática. Dessa vez, pedimos que todos os grupos fizessem uma leitura mais detalhada do contexto histórico de cada atividade, de modo que essa leitura viesse a contribuir de maneira decisiva no esclarecimento inicial, acerca da importância da história, e fazendo com que eles procurassem realizar investigações a respeito do desenvolvimento histórico do conteúdo estudado até os dias atuais, propondo assim um maior envolvimento na tarefa, levando-os a realizar certos questionamentos.

Os grupos apresentaram um bom envolvimento durante a aplicação das atividades, através de motivações ao longo das resoluções das atividades investigativas, sempre apresentando um certo interesse em ter contato com atividades dessa natureza. Não tivemos problemas de rejeição das atividades por parte de nenhum participante, apenas observamos que, alguns alunos que participaram da testagem, apontaram para possíveis problemas com alunos do ensino fundamental, que serão revelados a seguir, em depoimentos dos envolvidos na testagem das atividades, quando fosse feita a aplicação em sala de aula, pois os alunos não estão acostumados com essa abordagem metodológica. Outro problema apontado foi o pouco tempo que o professor tem para fazer aplicação dessas atividades nas escolas.

4.4.3 Sobre os depoimentos dos envolvidos na testagem

Nas conversas informais com os envolvidos, colhemos alguns depoimentos sobre as atividades de investigação:

Essas atividades levam o aluno a pensar, questionar os porquês;
 (...) as atividades são boas, interessantes e dinâmicas;
 (...) as atividades são válidas, levaria para os alunos;
 (...) as atividades ajudam o aluno a ver o conteúdo de forma diferente;
 (...) a forma de abordar o conteúdo é boa.
 (...) a parte histórica deveria ser mais explorada;
 (...) o aluno deve ser preparado antes para resolver essas atividades;
 (...) teria [o participante] dificuldades de aplicá-las em sala de aula;
 (...) os alunos teriam dificuldades para interpretar as atividades;
 (...) os alunos teriam resistência;
 (...) o tempo é pouco para resolução das atividades.(depoimentos dos envolvidos na testagem)

4.4.4 Nossas reflexões sobre as duas testagens

Após a realização das testagens e leitura analítica dos depoimentos dos envolvidos no processo, nos foi possível avaliar que as atividades foram bem recebidas pela maioria dos participantes nas duas vezes que fizemos as testagens e que a realização de atividades investigativas em história da matemática contribuiu de forma significativa para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos. Essas atividades, além de terem a função de levar os alunos a aprenderem, podem ser úteis para criar um ambiente estimulante de aprendizagem.

A realização dessas atividades contribuiu de forma significativa para que os alunos compreendessem o papel ativo que cada indivíduo pode ter na sua aprendizagem e tome consciência de que este também pode ser valorizado pelo professor. O professor, por sua vez, deve proporcionar aos alunos atividades desafiadoras, provocativas e estimulantes da criatividade matemática, de forma a prender a sua atenção e conduzi-lo a um processo de abstração matemática amplo e contínuo. Nesse sentido, ele tem a função de apoiar e estimular os alunos, criando um ambiente construtivo de aprendizagem e promotor da autonomia matemática do aluno.

Ao longo deste capítulo, descrevemos alguns dos episódios mais relevantes dos encontros com um grupo de estudo, onde as alunas pertencentes deste estudo realizaram atividades de investigação matemática envolvendo a história, num contexto de trabalho de grupo. Descrevemos também diferentes momentos destes encontros, desde o instante em que a pesquisadora fornece material para o estudo, até a fase de

discussão das conclusões obtidas durante as atividades de investigação matemática e sua testagem. Procuramos apresentar, de forma sucinta, os aspectos mais interessantes das atividades investigativas por elas desenvolvidas que se relacionam com os processos matemáticos que utilizaram e as dificuldades que sentiram durante a elaboração das atividades.

Acreditamos, portanto, que toda a reflexão teórico-prática, produzida ao longo da pesquisa, certamente contribuirá de forma significativa e criativa para a melhoria da prática do professor de matemática em sala de aula. Tal afirmativa parte do princípio de que as pesquisas de caráter aplicado, que vêm sendo realizadas na área de Educação Matemática, têm contribuído de forma eficaz para a superação das dificuldades conceituais e metodológicas encontradas pelos professores durante o seu exercício docente.

CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo, apresentamos uma síntese da segunda experiência, seguida de algumas considerações a respeito dos elementos que nos conduziram na busca de respostas às questões inicialmente formuladas. Além de outros aspectos que se evidenciaram no estudo, faremos, também, algumas recomendações para a melhoria do trabalho do professor em sala de aula, considerando a importância das atividades de investigação na matemática escolar envolvendo aspectos históricos.

5.1 Síntese da segunda experiência

O estudo, desenvolvido em torno da elaboração e testagem de atividades investigativas em matemática, objetivou investigar como um grupo de alunas, denominado grupo de estudo, envolveu-se na realização de atividades de investigação em matemática, a partir da história da matemática, partindo do princípio que o referido grupo não tinha a prática de lidar com esse tipo de abordagem metodológica na disciplina de matemática. Para irmos ao encontro deste objetivo, procuramos, por um lado, identificar as dificuldades que o grupo tinha em trabalhar métodos de resolução de equação em sala de aula, através da investigação, e desenvolver a autonomia produtiva do grupo com relação à elaboração de atividades de investigação para o ensino de matemática.

A realização de atividades de investigação na sala de aula parece ser fundamental quando se pretende que os alunos sejam construtores ativos do seu próprio conhecimento. Conforme esclarecimento anterior, explicitados no capítulo 1, questões norteadoras foram levantadas como forma de orientar o trabalho e clarificar os seus objetivos. Foram consideradas as seguintes questões: (i) Quais os procedimentos utilizados pelo grupo de estudo na realização de atividades de investigação? (ii) Como o grupo lida com os desafios encontrados nas atividades de investigação? (iii) Como se caracteriza o conhecimento didático do grupo relativo à elaboração das atividades de

investigação? (iv) Que comportamento esse grupo apresenta em relação às atividades de investigação?

A investigação feita, de natureza qualitativa, envolveu quatro (4) alunas, que não tinham experiência em estudos relacionados com investigação matemática e esse estudo foi realizado de forma colaborativa com a pesquisadora. Quanto à obtenção de informações do processo, foram utilizadas múltiplas fontes. Assim, as informações que constituem essa investigação tiveram como recursos as entrevistas, o diário de registros, e as observações apoiadas por registro em áudio. Utilizamos, ainda, como fonte de informação, as atividades investigativas elaboradas pelo grupo de estudos. As atividades de característica investigativa, elaboradas pelas alunas, tinham o intuito de levá-las a questionar suas concepções, contribuindo desta forma para a reformulação das atividades. A análise das informações teve por base os pressupostos teóricos do estudo a partir da confrontação dos dados recolhidos com esses pressupostos teóricos.

5.2 Reação do grupo de estudo ao trabalho de investigação

Apesar das alunas se mostrarem entusiasmadas e empenhadas na realização das atividades, desde o início ficou evidente que nem sempre para elas era muito claro o que se pretendia com este tipo de atividade. O nosso apoio prestado, bem como os momentos de discussão, foram essenciais para levar as alunas a perceber o que era efetivamente *investigar*. Ao longo da realização das atividades, as alunas foram melhorando a sua capacidade de observar, conjecturar, testar, justificar, argumentar, mostrando criatividade, revelando um certo espírito investigativo. Formulavam, de forma autônoma, as suas conjecturas, validavam-nas testando vários exemplos contidos nas atividades.

No entanto, foi na realização das últimas atividades que ficou mais evidente a conquista da consciência investigativa por parte dessas alunas, bem como da importância da organização das informações, da formulação de conjecturas e da sua validação através de exemplos e da necessidade de justificar e argumentar em defesa dos seus pontos de vista. Em vários momentos as discussões foram bastante

orientadas perdendo, progressivamente, esse caráter. As alunas melhoraram a sua capacidade de comunicar-se matematicamente, assumindo a argumentação um lugar de destaque.

Em síntese, as alunas mostraram, de um modo geral, ter aderido com entusiasmo à realização das atividades de investigação, revelando algumas alterações nas suas compreensões e no seu desempenho.

5.3 Sobre as atividades de investigação

No final do estudo, o grupo adquiriu uma compreensão mais verdadeira da atividade de investigação matemática e de alguns dos processos matemáticos nela envolvidos. As alunas reagiram com entusiasmo e motivação a este tipo de trabalho, referindo que gostaram de elaborar atividades de natureza investigativa.

Desde o início, sentiram-se motivadas para desenvolver esse tipo de atividade revelando, desde cedo, certa afinidade com a investigação matemática, envolvendo-se nela de forma espontânea. Elas mencionaram que as atividades de investigação poderiam permitir que os alunos do ensino fundamental compreendessem mais matemática de um modo mais simples, identificando o *saber* matemática com o *fazer* matemática. Elas também citaram que esses alunos, ao assumirem o papel de investigadores, não se esquecem dos resultados e dos processos desenvolvidos durante a atividade investigativa, assumindo as descobertas matemáticas como algo que lhes pertence. Todas evidenciaram que foi no início da elaboração das atividades que sentiram mais dificuldades.

Vários tipos de argumentos são indicados por diversos autores, como Ponte, Brocardo e Oliveira, para justificar a introdução das investigações na aula de matemática. Os dados analisados nesse estudo corroboram os indicadores apontados por esses autores:

(i) a exploração de investigações desperta o interesse dos alunos e facilita a aprendizagem;

(ii) as investigações promovem um ambiente de aprendizagem vivo em que os alunos participam ativamente;

(iii) as investigações são importantes para estabelecer como objetivo uma compreensão da atividade matemática.

Nessa perspectiva, podemos acrescentar que a realização de atividades através da investigação na sala de aula parece ser fundamental quando se pretende que os alunos sejam construtores ativos do seu próprio conhecimento.

5.4 Sobre o desempenho do grupo de estudo

As observações feitas em torno das alunas pertencentes ao grupo de estudo, denominadas Alfa, Beta, Gama e Delta, quando estas se encontravam envolvidas no processo de elaboração das atividades de investigação, nos permitiram perceber que as mesmas reagem de maneira diferente às tarefas propostas e de como estas as influenciaram.

Desde o início, o grupo desenvolveu grande parte do trabalho em colaboração, compartilhando os seus pensamentos matemáticos, nos quais as idéias de uma eram aproveitadas pela outra e vice-versa, para dar continuidade ao trabalho. A postura assumida pela pesquisadora e a estrutura das próprias atividades contribuíram para levar as alunas a encararem, de um modo diferente, o trabalho. As maiores alterações revelaram-se com Alfa e Beta, pois Beta logo percebeu que o trabalho se tornaria mais produtivo se interagisse com as colegas, enquanto que Alfa foi levada a perceber a necessidade de ir um pouco mais além na realização das atividades e, em virtude, disso acabou por criar gosto em descobrir coisas mais interessantes.

Durante todo o estudo, percebemos que as alunas apresentaram um alto grau de responsabilidade e autonomia nas suas aprendizagens, principalmente em relação as suas atribuições. A relação de comunicação estabelecida no pequeno grupo permitiu o desenvolvimento da capacidade de argumentação entre elas, fazendo com que esse fato também tivesse sido refletido nas suas interferências e nas suas discussões. Além disso, os momentos de discussão em grupo foram importantes no sentido de ajudar a

perceber algumas das alterações na compreensão que as alunas tinham em relação aos conteúdos estudados. Nessas discussões, percebemos o medo de exporem as suas idéias, em virtude do trabalho não ter sido ainda validado, podendo assim cometer erros.

No decorrer dos encontros realizados, percebemos que o esforço desenvolvido era valorizado e os erros eram aproveitados para estimular a discussão, permitindo assim um maior envolvimento destas alunas, encarando estes momentos de forma mais prazerosa. Todas revelaram, desde o início, o gosto pelos momentos de discussão, achando importante ouvir e discutir as opiniões, umas das outras. As atividades de investigação, ao levarem as alunas a exporem as suas idéias, a discutirem estratégias, a argumentarem em defesa das suas opiniões e em criticar as das outras, desenvolveu nas alunas alguns processos de raciocínio necessários a melhoria da compreensão e da construção da matemática, relacionada nas atividades, que antes eram desconhecidos por elas.

Nesta perspectiva, podemos afirmar que as atividades investigativas levaram esse grupo de estudo a desenvolver a capacidade de investigação matemática, sendo perceptível o interesse com que as alunas se adaptaram a alguns conceitos necessários para a elaboração das atividades. Podemos ressaltar, a partir do que foi exposto, o importante papel que as atividades de investigação desempenham no ensino da matemática, contribuindo para que os alunos adquiram uma visão mais verdadeira em relação a esta ciência.

As atividades de investigação proporcionaram ao grupo de estudo um contexto rico em desafios. Assim, as participantes do grupo se sentiram motivadas e se empenharam com prazer na sua realização. Ao formularem conjecturas, ao validá-las, ao justificá-las e ao argumentarem em sua defesa, desenvolveram sua capacidade de raciocínio, posto que uma boa capacidade de raciocínio não pode estar desligada do conhecimento de conceitos matemáticos. As atividades de investigação permitiram profunda relação entre os conteúdos ensinados e os processos de raciocínio, ao mobilizarem conhecimentos anteriormente adquiridos dando-lhes um outro significado, contribuindo desta forma para uma melhor apropriação destes, pelo grupo.

5.5 Uma reflexão sobre o estudo

Ao final deste estudo, é importante fazermos uma reflexão sobre o trabalho realizado com o grupo e sua relação com o desenvolvimento da investigação como perspectiva pedagógica na formação de professores de matemática. Em relação ao trabalho com as alunas, um dos aspectos mais positivos foi a forma entusiasmada como aderiram às atividades de investigação, principalmente se recordarmos que não tinham qualquer experiência de trabalhos nessa natureza. A vontade em participar na elaboração das atividades, associada à curiosidade e ao desejo de descobrir coisas novas, estiveram presentes na maior parte dos encontros, tendo facilitado todo o processo de estudo. Outros fatores como o cumprimento dos prazos “mais ou menos” estipulados para a entrega das atividades elaboradas pelo grupo, contribuiu também para o sucesso deste estudo, possibilitando a discussão das atividades de investigação.

Nossas reflexões sugerem que a introdução de atividades de investigação na sala de aula, se de início provocou alguma estranheza, logo passou a ser apreciada pelas alunas; além disso, percebemos que, se as alunas do grupo apresentavam no início um comportamento passivo para cada atividade elaborada, logo depois se organizavam e se envolviam intensamente na atividade. O crescimento sucessivo que as alunas demonstraram ao longo dessas atividades, na facilidade progressiva com que iniciavam cada atividade, resulta simultaneamente da natureza das tarefas e da interação que aconteceu, conduzindo a uma partilha cada vez maior de significados.

Acreditamos, portanto, que todo o material teórico-prático, produzido ao longo da pesquisa, certamente contribuirá de forma significativa e criativa para a melhoria da prática do professor de matemática em sala de aula. Tal afirmativa leva em consideração que as pesquisas de caráter aplicado, que vêm sendo realizadas na área de Educação Matemática, têm contribuído de forma eficaz para a superação das dificuldades conceituais e metodológicas dos professores durante o seu exercício docente.

O processo de acionamento cognitivo é concretizado se considerarmos que, nesse estudo, as ações investigativas apoiadas pelos estudos históricos contribuíram para a obtenção de resultados satisfatórios. Isso reforça cada vez mais o argumento

favorável ao uso da investigação histórica como meio de ampliação da capacidade de compreensão conceitual dos professores e dos alunos.

Nesse sentido, é possível concluir que os diversos métodos de investigação matemática, trabalhados nesse estudo, durante o desenvolvimento, apontam a possibilidade didática de se buscar uma variedade de possibilidades matemáticas a serem oferecidas aos estudantes como forma de acionar seu processo cognitivo de aprendizagem nas atividades de sala de aula.

5.6 Recomendações aos professores

Como consequência deste estudo, é possível indicarmos algumas sugestões de ações a serem implementadas pelo professor na sala de aula, para que possa realizar uma investigação neste domínio, já que estas desempenham um papel muito importante no levantamento de novas questões e no debate sobre a Educação Matemática. Reconhecendo todo o valor que a realização de atividades de investigação, envolvendo a história da matemática, pode ter no processo de ensino-aprendizagem dos alunos e a possibilidade que os atuais programas oferecem, mesmo que de forma pouco destacada, para a sua integração na sala de aula, parece ser realmente importante contribuir com algumas recomendações a professores interessados em proporcionar aos seus alunos este tipo de trabalho.

Entendemos que a atenção dada pelo professor à atividade de investigação é muito importante, mas a sua presença deverá ser discreta, questionadora e, se necessário, voltada para o incentivo à promoção dos processos matemáticos menos considerados pelos alunos, tal como a justificção ou a prova. A discussão final das atividades é também um momento decisivo do trabalho de investigação, devendo o professor, ao prepará-lo, levar em consideração que se trata do momento ideal para desafiar os alunos e prolongar a investigação, e não somente para apresentar resultados.

Além disso, deve-se destacar a importância dos professores proporcionarem aos alunos a realização do trabalho investigativo, tanto em grupo como individualmente,

pois apesar do grupo contribuir para que os alunos possam influenciar positivamente na investigação uns aos outros, também o momento do trabalho individual pode trazer uma grande riqueza ao próprio desempenho de cada aluno. Mas, para que os alunos se familiarizem, progressivamente, com os processos matemáticos utilizados na realização das investigações, não basta proporcionar-lhes momentos significativos de trabalho investigativo. É também importante que os professores tomem consciência dos processos operados pelos alunos e os ajudem na realização das atividades de investigação sempre que for necessário.

Os professores devem ser os primeiros a implementar este tipo de atividade, de modo que seus alunos possam ser beneficiados, através da influência positiva que elas possibilitam. Uma investigação mais prolongada permitirá que o professor perceba como os alunos desenvolveram um maior número de processos, como se organizaram em estratégias e de que forma podem transformar as competências possíveis para ampliar o seu conhecimento. Assim, considera-se importante continuar este tipo de investigação numa perspectiva evolutiva, levando em conta não só os processos utilizados e conhecimentos mobilizados na realização de atividades investigativas, mas ainda, de que modo as competências desenvolvidas terão implicações no contexto de sala de aula e nas várias áreas de aprendizagem.

Assim, as atividades de investigação envolvendo a história da matemática podem proporcionar, a todos os alunos, momentos de verdadeira atividade matemática, contribuindo para desenvolver uma compreensão mais verdadeira do que é fazer matemática, bem como de sua aprendizagem. Então, é pertinente pensar a sua inclusão como abordagem didática na licenciatura em matemática. Um elemento fundamental para que esta inclusão se efetive é a sensibilização do próprio professor. Conforme já explicitamos, este deve assumir o currículo a partir de sua prática reflexiva. Nesta perspectiva, os programas de licenciatura, em vigor, parecem ter a amplitude suficiente para permitir a introdução das atividades de investigação nas aulas de matemática. Seria importante introduzir, em nível curricular do referido curso, as atividades de investigação, principalmente na perspectiva de formação inicial dos professores.

Concluindo essa reflexão, podemos afirmar que foi gratificante a certeza de que, apesar das dúvidas e dificuldades sentidas, o grupo de estudo e os alunos envolvidos em todo o processo trabalharam com atividades de investigação e desenvolveram suas idéias sobre os processos característicos da matemática. Finalmente, deste trabalho, sai reforçada a idéia de que encarar a investigação como uma abordagem didática na formação de professores de matemática pode contribuir para uma conexão significativa entre conteúdos e métodos, permitindo estabelecer, como objetivo final, uma Educação Matemática mais significativa para os alunos.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar**. Campinas, SP: Papyrus, 1985. (Série Prática Pedagógica).

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. 3. ed. Brasília: 2001a.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. 3. ed. Brasília: 2001b.

BEZERRA, O. M.; MENDES, I. A. Atividades investigatórias no ensino de equações: contribuições para a formação de professores. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2006a. Belo Horizonte. **Anais...**

_____. Ensino de equações a partir de atividades investigatórias em história da matemática. In: ENCONTRO LATINO AMERICANO DE PÓS-GRADUAÇÃO, 10, 2006. São José dos Campos. **Anais...** São José dos Campos: JAC Gráfica e editora, 2006b.

_____. Investigação histórica em sala de aula: reflexões sobre uma experiência. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 7, 2007. Guarapuava. **Anais...** Guarapuava: Editora Unicentro, 2007.

BEZERRA, O. M.; ROCHA, S. M. C. A investigação histórica na formação de professores de matemática. In: ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 5., 2007. Castelo Branco, Portugal. **Anais...**

BROCARD, J. **As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano**. 2001. Tese - Departamento de Educação da Faculdade de Ciências Universidade de Lisboa, Portugal, 2001.

CAMARGO, R. P. **Tarefas investigativas de matemática: uma análise de três alunas de 8ª série do ensino fundamental**. 2006 - Dissertação. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de matemática**. 2004. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). FE/Unicamp. Campinas, SP, 2004.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DICKSON, L, E. **Elementary theory of equations**. New York: John Wiley & Sons, 1914.

FAZENDA, I. **Metodologia da pesquisa educacional**. São Paulo: Cortez, 1999.

FERNANDES, C. **Bhaskara I**. Disponível em <<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/Bhaskara.htm>>. Acesso em: 07 out 2006. 17:43.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D; CRISTÓVÃO, E. M. (Org.). **História e investigação de/em aulas de matemática**. Campinas, SP: Alínea, 2006.

FOSSA, J. A.; MENDES, I. A. Uma proposta metodológica para pesquisa em Educação Matemática. In: FOSSA, J. A. (Org.). **Educação Matemática**. Natal: EDUFERN, 1998, p. 127-133. (Coleção EPEN, 19).

FOSSA, J. A.; BEZERRA, O. M. Atitudes sobre a matemática e outras disciplinas de alunos do primeiro grau maior. In: FOSSA, J. A. (Org.). **Educação Matemática**. Natal: EDUFERN, 1998, p. 117-126. (Coleção EPEN, 19).

FOSSA, J. A. **Ensaio sobre a educação matemática**. Belém: EDUEPA, 2001.

FRAGOSO, W. C. **Equação do 2º grau**: uma abordagem histórica. Ijuí: UNIJUÍ, 1999.

JOSEPH, G. G. **La Cresta Del Pavo Real**: Las matemáticas y sus raíces no europeas. Madri: Pirâmide, 1991.

LAGARTO, M J. **História da matemática na Babilônia**. Disponível em: <<http://www.malhatlantica.pt/mathis/babilonia/babilonia.htm>> . Acesso em: 13 out. 2006. 16:15.

LAGRANGE, J. L. **Lectures on elementary mathematics**. Chicago: The open court publishing company, 1898.

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. **Historia da matemática na Babilônia**. Disponível em: < <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/babilonia.html>>. Acesso em 15 out. 2006. 21:12

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A. Tendências atuais na educação matemática: experiências e perspectivas. In: FOSSA, J. A. (Org.). **Educação Matemática**. Natal: EDUFRRN, 1998, p. 11-18 (Coleção EPEN, 19).

MENDES, I. A. **Ensino da Matemática por atividades**: uma aliança entre o construtivismo e a história da Matemática. 2001a. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação. Natal, 2001a.

_____. **O uso da história no ensino da matemática**: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001b. (Série Educação, n. 1).

_____. Atividades históricas para o ensino de trigonometria. In: BRITO, A. J. et al. **História da Matemática em atividades didáticas**. Natal: EDUFRRN - Editora da UFRN, 2005a.

_____. **A formação de professores de matemática a partir da história da matemática**. Projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico – CNPq. Natal, 2005b.

_____. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006a.

_____. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006b.

_____. Relatório técnico do projeto **A formação de professores de matemática a partir da história da matemática**. Projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico – CNPq. Natal, 2007.

MENDES, I. A.; SÁ, P. F. de. **Matemática por atividades**: sugestões para a sala de aula. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em Educação Matemática).

MORGADO, J. **Equações do 2º grau ou equações quadráticas**. Disponível em: < http://www.ipv.pt/millennium/16_ect1.htm > Acesso em: 29 out. 2006. 12h14min.

NOBRE, S. **História da Resolução da Equação de 2º Grau**: uma abordagem pedagógica. Sociedade Brasileira da Matemática, São Paulo, 2003.

OLIVEIRA, H. **Actividades de investigação na aula de Matemática**: aspectos da prática do professor. 1998. Dissertação (Mestrado). Departamento de Educação da Faculdade de Ciências Universidade de Lisboa, Portugal, 1998.

OLIVEIRA, H. et al. Os professores e as atividades de investigação. In: ABRANTES, P. et. al. (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa, Portugal: APM, 1999.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Departamento de Ensino de Segundo Grau. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Paraná. Curitiba, 2006.

PAVANELLO, R. M. A pesquisa na formação de professores de matemática para a escola básica. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, ano 10, n. 15, p. 08-13, 2003.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um enfoque do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. In: GTI (Org.), **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

_____. **Investigar, ensinar e aprender**. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Profmat\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf)> Acesso em: 17 mai 2005a.

_____. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, 2, 93-169, 2003. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em: 23 out 2005b.

PONTE J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PONTE, J. P. et al. **As atividades de investigação, o professor e a aula de matemática**. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Fonseca-etc\(ProfMat-MPT\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Fonseca-etc(ProfMat-MPT).doc)>. Acesso em 26 abril 2005.

RICHARDSON, R. et al. **Pesquisa social**: métodos e técnicas. 3. ed. rev. ampli. São Paulo: Atlas, 1999.

ROCHA, S. M. C. **Investigação histórica na formação de professores de matemática**: Um estudo centrado no estudo de funções. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. CCET-UFRN. Natal/RN, 2008.

SANTOS, L. **A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário**. Tese (Doutorado). Departamento de Educação da Faculdade de Ciências Universidade de Lisboa, Portugal, 2000.

SEGURADO, M. I. A. **A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo**. 1997. Dissertação (Mestrado). Departamento de Educação da Faculdade de Ciências Universidade de Lisboa, Portugal, 1997.

SHIRAK, A. **História da matemática Árabe**. Disponível em:
<<http://www.malhatlantica.pt/mathis/Arabes/Kwarizmi1.htm>>. Acesso em: 12 out 2006.
10:12.

SILVA, A. et al. O currículo de matemática e as actividades de investigação. In:
ABRANTES P. et al. (Ed.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo**.
Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 69-85.

SKEMP, R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**: formacion de conceptos matematicos. Madrid: Morata, 1980.

WAERDEN, V. **História da matemática na Índia**. Disponível em:
<<http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/Brahmagupta.htm>>. Acesso em: 12 out 2006.
09:23.

ZABALZA, M. A. **Diários de aula**: um instrumento de pesquisa e desenvolvimento profissional. Porto Alegre: Artmed, 2004.

APÊNDICES

Apêndice A

Questionário de avaliação da primeira experiência¹

Instrumento aplicado para avaliação

1. Em relação ao grupo:

- a) Como ocorreu a interação verbal em sala de aula?
- b) Como foram as interações verbais com o professor da disciplina e com os professores auxiliares?
- c) Como se manifestaram o raciocínio e os conhecimentos matemáticos nessa experiência?

2. Qual a contribuição da investigação histórica realizada para a compreensão dos conceitos matemáticos?

3. Que contribuições a História da Matemática pode dar para as atividades realizadas em sala de aula?

4. O que você entende por investigação?

5. Em sua opinião, qual a importância de se trabalhar com investigação em sala de aula?

6. De que modo você acha que esta nova metodologia de ensino-aprendizagem da História da Matemática contribuiu para a formação dos conceitos matemáticos estudados?

7. Teça considerações sobre a nova metodologia de ensino-aprendizagem trabalhada neste semestre.

8. Escolha pelo menos um episódio acontecido em sala de aula que você achou importante e faça seus comentários.

9. Quais as contribuições da metodologia adotada para a sua formação profissional?

10. Como você utilizará os conhecimentos aprendidos nesta disciplina com os estudantes do ensino fundamental ou médio quando for professor?

¹ Este mesmo questionário foi também utilizado no trabalho de Rocha (2008).

Apêndice B

Entrevista com o grupo de estudo - Primeira experiência

Instrumento aplicado em relação ao ensino

Nome: _____

Em relação ao ensino

1. De maneira geral, o que falta, por vezes, em algumas aulas de matemática para que elas funcionem de maneira mais eficaz?
2. Existe algum momento na sua vida que retrate a futura professora que você escolheu ser?
3. Como você espera superar os problemas que irão surgir na sua prática docente?
4. Quando você decidiu ser professora de matemática, já achava que ela era considerada uma disciplina difícil? Como espera trabalhar essa informação junto aos futuros alunos?
5. Qual a sua opinião sobre o atual ensino da matemática? Houve mudanças significativas em relação ao tempo em que você era aluna?

Apêndice C

Entrevista com o grupo de estudo - Segunda experiência

Instrumento aplicado em relação às atividades de investigação

Nome: _____

Em relação às atividades de investigação em matemática

1. Qual o principal motivo que a levou a aceitar trabalhar com um grupo de estudo que lidasse com elaboração de atividades envolvendo investigação matemática?
2. Que tipo de dificuldades você acha que vai enfrentar *trabalhando com atividades* dessa natureza?
3. Quais são suas principais expectativas em relação a essa nova proposta de trabalho?
4. Você acha que vai ter muitas dificuldades para conseguir *elaborar essas atividades*?
5. Qual é sua maior preocupação em relação a tudo isso?

Apêndice D

ATIVIDADE 1: INVESTIGANDO E APRENDENDO

Objetivos: Conhecer as características presentes em uma equação do 2º grau para identificá-la sempre que necessário.

Conhecimentos prévios: Potenciação e equação do 1º grau.

Definição: “Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja uma ou mais letras que representem números desconhecidos é denominada equação. Cada letra que representa um número desconhecido é chamada incógnita”.

1. Será que $x^2 + 8x + 15 = 0$ satisfaz essa definição? Por quê?
2. Agora vamos comparar uma equação do 1º Grau, que já conhecemos com $x^2 + 8x + 15 = 0$:
 $x + 10 = 0$ e $x^2 + 8x + 15 = 0$

- Cite as diferenças e semelhanças existentes:

Semelhanças:

Diferenças:

3. Ao observar $x + 10 = 0$ e $x^2 + 8x + 15 = 0$ você deve ter encontrado semelhanças e diferenças. De acordo com o que você observou separe as sentenças abaixo em dois grupos, de forma que sentenças semelhantes fiquem no mesmo grupo.

- $x^2 + 9x + 8 = 0$
- $x + 5 = 8$
- $3x^2 - 15x + 12 = 0$
- $x + 0 = 1$
- $x + 98 = 4$
- $x^2 - 3x - 4 = 0$
- $x^2 - 14x = 0$
- $x + 7 = 0$
- $x^2 - 169 = 0$
- $x^2 - 5x = 0$
- $x^2 - 3x - 4 = 0$

4. Sabemos que $x + 10 = 0$ é uma equação do 1º grau, que nome você daria para a sentença $x^2 + 8x + 15 = 0$. Justifique sua resposta.

Apêndice E

ATIVIDADE 2: DE ONDE VEIO ESSA FÓRMULA?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Objetivos: Resolver equações do 2º grau

Conhecimentos Prévios: Produtos notáveis

Contexto Histórico: Muitas civilizações se preocuparam em achar soluções para equações do 2º grau. O primeiro registro desse tipo de equação foi feito em tábua de argila e a solução era obtida e apresentada através de palavras, como uma receita, de forma retórica. Foi através da interpretação de procedimentos usados por antigas civilizações que hoje resolvemos equações usando símbolos. A forma, de resolver equações do 2º grau, usada atualmente deve-se ao matemático hindu S'ridhara, mas foi através da citação do, também matemático hindu, Báskhara que ela ficou conhecida. A citação é:

“Multiplique ambos os membros da equação por um número igual a quatro vezes o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida ao quadrado. Junte a ambas o número igual ao quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida. Então extraia a raiz quadrada.”

- Os passos seguintes estão de acordo com a citação acima.

1º . Deixe a equação na forma $ax^2 + bx = c$.

2º . Multiplique ambos os membros por $4a$.

3º . Some a ambos os membros b^2 .

4º . Extraia a raiz em ambos os lados.

1. Agora que você conheceu a regra, através da qual os hindus resolviam equações, aplique essa regra na equação $ax^2 + bx - c = 0$. Lembre que o objetivo é encontrar o valor de x .

2. Depois de aplicar a regra hindu na equação $ax^2 + bx - c = 0$, observe com muita atenção o que você encontrou, compare com a seguinte fórmula e faça algumas anotações, se achar necessário.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. De onde veio essa fórmula?

4. Resolva a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, usando a regra hindu.

Apêndice F

ATIVIDADE 3: A FÓRMULA HINDU

Objetivos: Resolver equações do 2º grau

Conhecimentos Prévios: Fórmula de Bháskara

Contexto Histórico: Os antigos matemáticos hindus seguiam uma regra para resolver equações do 2º grau que se traduzia na seguinte fórmula:

$$X = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c} - \frac{b}{2}}{a}$$

Lembre que um número real positivo tem duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

Exemplo: $\sqrt{4} = +2$ e -2

1. Resolva a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ usando a fórmula hindu.

2. Resolva a mesma equação usando a fórmula de Bháskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Você encontrou as mesmas raízes?

4. Será que essa fórmula hindu corresponde a conhecida fórmula de Bháskara? Fazendo alguns cálculos algébricos vamos “mexer” nesta fórmula hindu para ver se ela se “transforma” na fórmula de Bháskara.

Apêndice G

ATIVIDADE 4: NÃO PERCA O ZERO

Objetivos: Resolver equações do 2º grau incompletas.

Conhecimentos Prévios: Fatoração

Contexto Histórico: A invenção do zero ocorreu no século VI e é considerada como um dos maiores avanços de toda a história da Matemática.

- Observe a seguinte equação do 2º grau:

$$x^2 = 2x$$

1. Um número é raiz de uma equação quando torna a igualdade verdadeira. Sabendo disso, teste alguns números e veja os que são raízes da equação acima.

2. Quais os números que você encontrou? 0 e 2? Se não encontrou esses veja agora se eles satisfazem a igualdade.

3. Se 0 e 2 satisfazem a equação, eles são raízes da equação.

Observe agora a solução de uma equação desse tipo antes da invenção do zero.

$$\begin{array}{l} X^2 = 2X \\ \frac{X^2}{X} = \frac{2X}{X} \\ X = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{X \cdot X}{X} = \frac{2 \cdot X}{X} \\ X = 2 \end{array}$$

4. Hoje já existe o zero, e ele também é solução da equação $x^2 = 2x$.

A equação $x^2 = 2x$ pode ser escrita assim: $x^2 - 2x = 0$.

Encontre as suas duas raízes!

- 1º dica: Fatoração

- 2º dica: Se $a \cdot b = 0$ é porque $a = 0$ ou $b = 0$

5. Resolva as seguintes equações usando as dicas anteriores.

a) $3x^2 - 7x = 0$

b) $4x^2 + 6x = 0$

c) $-4x^2 - 12x = 0$

Apêndice H

ATIVIDADE 5: OLHANDO O DELTA

Objetivos: Analisar as raízes da equação.

Conhecimentos Prévios: Fórmula de Bháskara e radiciação

Contexto Histórico: Os escribas da Babilônia nunca poderiam imaginar que um dia os matemáticos inventariam os números negativos. Eles não representavam as equações por letras, mas sabiam que, para encontrar a resposta de um problema como:

Qual é a medida do lado de um terreno quadrado de área 50? Bastaria extrair a raiz quadrada de 50. Hoje podemos expressar este problema como $x^2 = 50$.

1. Hoje os números negativos já existem e se esse problema não tratasse de medidas, essa equação $x^2 = 50$ teria uma outra solução. Sabendo que todo número positivo tem sempre duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa, quais as raízes dessa equação?

2. A fórmula de Bháskara, através da qual encontramos as raízes de uma equação do 2º grau extrai a raiz quadrada de delta. Observe

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \text{ Porque será que antes dessa raiz podemos usar o símbolo } \pm ?$$

3. Olhando somente para o delta (Δ) podemos saber como serão as raízes da equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Se delta for igual a zero a equação terá duas raízes reais iguais.
- Se delta for maior que zero a equação terá duas raízes reais diferentes.
- Se delta for menor que zero a equação não terá raiz real.

a) Olhando o delta das equações abaixo diga como serão as raízes da equação.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

b) Encontre as raízes das equações acima e, usando seu conhecimento sobre radiciação e analisando a fórmula de Bháskara, explique:

- Porque quando delta é maior que zero temos duas raízes reais e diferentes?
- Porque quando delta é igual a zero temos duas raízes reais e iguais?
- Porque quando delta é menor que zero não temos raízes reais?

Apêndice I

ATIVIDADE 6: A PRIMEIRA FÓRMULA

Objetivos: Resolver equações do 2º grau completas.

Conhecimentos Prévios: Usar a fórmula de Bháskara.

Contexto Histórico: Os escribas da Babilônia resolviam muitas equações do 2º grau que podiam ser expressas na forma: $x^2 - bx = c$.

Mas a resolução vinha sempre gravada na tabuleta sem nenhuma explicação, seguindo fielmente essa fórmula:

$$X = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$$

1. Resolva a equação $x^2 - x = 6$ usando a fórmula acima, que é a primeira fórmula resolutive da equação do 2º grau. Os escribas, em sua fórmula, encontravam uma raiz e utilizavam, por exemplo, para esta equação $a = 1$, $b = 1$ e $c = 6$.

Observe que esses coeficientes são retirados de forma diferente da fórmula de Bháskara!

Lembre também que, agora você sabe que um número positivo tem duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

2. Resolva esta mesma equação usando a fórmula de Bháskara.

3. Existe alguma diferença entre essas fórmulas? Você encontrou o mesmo resultado?

4. O que você observou com relação aos coeficientes usados na primeira fórmula e os que você usa na fórmula de Bháskara?

Apêndice J

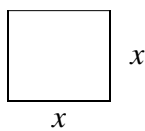
ATIVIDADE 7: COMPLETANDO QUADRADOS 1

Objetivos: Completar quadrado pelo método geométrico e Resolver equação do 2º Grau completa sem o auxílio da fórmula de Bháskara;

Conhecimentos Prévios: Radiciação, equação de primeiro grau, potência e operações com números decimais.

Contexto Histórico: Al-Khowarizmi estudou a álgebra geométrica de Euclides para resolução de equação do 2º Grau, ele não conhecia os números negativos, achou a raiz $x = 3$ para a equação $x^2 + 10x = 39$ e verificou geometricamente se estava correta, assim:

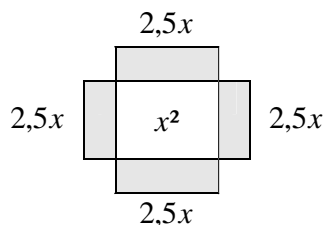
1. Desenhou um quadrado de lado x .



2. O termo $10x$, um retângulo de lados 10 e x , ele dividiu em quatro retângulos de áreas iguais. Logo, áreas $2,5x$.



3. Aplicou cada um desses novos retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2 .

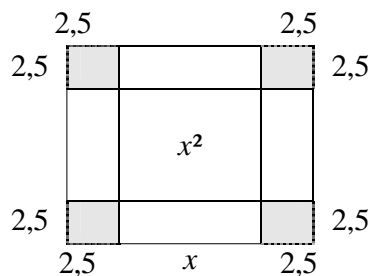


A área da figura formada:

$$x^2 + 4 \cdot 2,5x = x^2 + 10x$$

A equação $x^2 + 10x = 39$, ou seja, a área da figura deste item é 39.

4. Depois completou o quadrado do item 3, assim, a área do quadrado é igual a:



$$39 + 4.(2,5)^2 = 39 + 25 = 64$$

Assim, Al-Khowarizmi deduziu, substituindo os valores já conhecidos, que o lado procurado da equação:

$$2,5 + x + 2,5 = 8$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 8 - 5$$

$$x = 3$$

Como a raiz de 64 é ± 8 . Então, $2,5 + x + 2,5 = \pm 8$, logo, $x = 3$ e $x = -13$.

- Considerando o problema dos escribas: "Qual é o lado do quadrado, se a área menos o dobro do lado é vinte e quatro?"

I) Usando o método geométrico de Euclides descubra, como al-Khowarizmi fez, o lado do quadrado.

II) Sabendo que a raiz quadrada de um número é \pm esta raiz, descubra as raízes da equação.

III) Use o mesmo método, achando as duas raízes para as equações $x^2 + 4x = 32$ e $x^2 + 8x = 9$.

Apêndice K

ATIVIDADE 8: COMPLETANDO QUADRADOS 2

Objetivos: Resolver equações do 2º grau completas, completar quadrado, extrair raiz quadrada e proporcionar revisão das operações com números decimais.

Conhecimentos Prévios: Produtos Notáveis; Radiciação e Decomposição em fatores primos.

Contexto histórico: Al-Khowarizmi não conhecia os números negativos. Por isso seus métodos determinavam somente as raízes positivas e o zero. Ele resolvia as equações utilizando somente palavras, inclusive para expressar os números, e seu método de resolução de equação de 2º grau consistia em “completar o quadrado”, que significa formar o trinômio quadrado perfeito.

1. Verifique nas equações abaixo se ocorre um trinômio quadrado perfeito, senão, complete o quadrado.

a) $x^2 + 10x = 39$

b) $x^2 - 4x = 5$

2. Como já sabemos que um número positivo tem duas raízes quadradas, encontre as raízes das equações acima, reduzindo o trinômio quadrado perfeito ao termo $(x - a)^2$

3. Desenvolva a equação abaixo, usando o mesmo método anterior, e responda se ela tem raízes reais. Registre como você chegou à sua conclusão e analise porque isso ocorre.

- $x^2 + 10 = 6x$

Apêndice L

ATIVIDADE 9: COMPLETANDO QUADRADOS 3

Objetivos: Classificar as equações do 2º Grau e identificar a equação fora do contexto de algoritmo, ou seja, identificar a equação quando ela aparece só com palavras, sem símbolos matemáticos.

Conhecimentos Prévios: Noções de geometria plana, equações, grau de polinômios.

Contexto Histórico: Na obra *Hisab-Al-jabr-wa-al-mucabalah* de autoria de Al-Khowarizmi (c. 778 – 850 a.c.), matemático árabe, ele não utilizava nenhum tipo de símbolo. Ele chamava x^2 de quadrado, x de raiz, e os números eram os coeficientes das variáveis e os termos independentes. Uma equação do segundo grau, como por exemplo, $2x^2 = 5x$, seria expressa mais ou menos deste modo: “se o quadrado junto com 2 é igual a cinco raízes, digam-me quanto vale uma raiz”.

1. No Al-jabr, Al-Khowarizmi separou e classificou as equações do segundo grau em vários tipos. Complete o quadro abaixo descrevendo-as como Al-Khowarizmi e ainda, construa, se for o caso, suas figuras geométricas correspondentes.

Equação	Figura Geométrica	Descrição por extenso
1) $4x^2 = 0$		Quatro quadrados é igual a zero.
2)		
3)		Quadrado junto com 10 raízes é igual a 39.
4) $x^2 = 4$		

2. Sabendo que uma equação completa tem três termos, observe as equações encontradas no quadro e classifique-as em completa ou incompleta.

Apêndice M

ATIVIDADE 10: O X DA QUESTÃO

Objetivos: Resolver equações do 2º grau incompletas, identificar a solução adequada de um problema matemático e desenvolver métodos para aproximar raiz quadrada.

Conhecimentos Prévios: Potenciação; radiciação; decomposição em fatores primos.

Contexto Histórico: Al-Khowarizmi expressava a equação de 2º grau incompleta $x^2 = 50$ desse modo: “quadrado igual a números”. Na época dos Sumérios, c. 2000 a.C, na Babilônia, a ascensão social de um filho de agricultor ou comerciante era alcançada tornando-se escribas, que por dez anos estudavam e dedicavam-se muito à matemática. Eles também não conheciam como representar equações por letras, e propunha o problema sobre “quadrado igual a números”, do seguinte modo: “Qual é a medida do lado de um terreno quadrado de área 50?” Eles sabiam que para calcular o lado de um terreno quadrado bastava extrair a raiz quadrada da área, sabiam que o inverso da potenciação é a radiciação. Neste caso, a raiz seria o lado do quadrado.

Um número positivo tem sempre duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa. Por exemplo, o número 49 tem como raiz $+7$ e -7 . Veja:

$$(+7)^2 = (+7).(+7) = 49$$

$$(-7)^2 = (-7).(-7) = 49$$

Assim, $x^2 = 50$ tem duas raízes:

$$x = + \sqrt{50} \quad \text{ou} \quad x = - \sqrt{50}$$

I) Descubra então qual o lado do terreno.

II) Descreva como você achou a raiz de 50.

III) Agora faça o mesmo para terrenos quadrados de áreas 36, 24 e 10.

Veja como os escribas faziam para aproximar uma raiz:

1. Seleccionavam o número inteiro cujo quadrado mais se aproximava de 50.

$$7^2 = 49$$

$$a = 7 \text{ (primeira aproximação)}$$

2. Dividiam 50 pela primeira aproximação, até que o quociente ficasse com o dobro de algarismos do divisor.

$$\frac{50}{7} = 7,1 + 3$$

3. Calculavam a média aritmética entre a primeira aproximação e 7,1.

$$\frac{(7 + 7,1)}{2} = 7,05$$

$$a = 7,5 \text{ (segunda aproximação)}$$

4. Dividiam 50 pela segunda aproximação, até que o quociente ficasse com o dobro de algarismos do divisor.

$$\frac{50}{7,05} = \frac{5000}{705} = 7,09219 + 605$$

5. Calculavam a média aritmética entre a segunda aproximação e 7,0919.

$$\frac{7,05 + 7,09219}{2} = 7,071095$$

Assim, a raiz de 50 = 7,07105

Na calculadora, raiz de 50 = 7,07105. Chegavam muito próximo!

Apêndice N

ATIVIDADE 11: DUAS VEZES PROCURADO

Objetivo: Resolver equações do 2º Grau incompletas e ser crítico ao encontrar a solução de um problema matemático.

Conhecimentos Prévios: Fatoração; equação (propriedade de cancelamento).

Contexto Histórico: Você aprendeu que a raiz de uma equação do 2º grau do tipo $x^2 = 50$ é dada extraindo-se a raiz do número ou termo independente, mas é importante também aprender a achar a raiz da equação incompleta do tipo quadrado igual a raiz.

No século VI ocorre um dos maiores avanços de toda a história da matemática: a invenção do zero na Índia. Sem o zero, equações do tipo $x^2 = 2x$, ou seja, “o número cujo quadrado é o dobro do próprio número” tinham somente uma raiz.

Veja:

Se $x^2 = 2x$, então

$$\frac{x^2}{x} = \frac{2x}{x} \rightarrow \frac{x \cdot x}{x} = \frac{2 \cdot x}{x} \rightarrow x = 2$$

Ora, 2 é uma raiz pois $2 \cdot 2 = 4$, ou seja, 2 é um número cujo quadrado é o dobro dele. Mas, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ e $2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$ não seria outro número cujo quadrado é igual ao dobro dele? Então falta encontrar na resolução acima $x = 0$.

No século IX, Al-Khowarizmi divulga o zero, escrevendo um livro chamado Sobre a arte hindu de calcular, explicando os cálculos com dez símbolos numéricos e a partir daí o zero se incorpora definitivamente no mundo matemático.

Sabendo que se $a \cdot b = 0$ ou $a = 0$ ou $b = 0$:

- I) Encontre qual o erro no modo de resolução apresentado para a equação $x^2 = 2x$.
- II) Ache de seu modo as duas raízes desta equação, registrando todos os caminhos que você utilizou.

ANEXO

Anexo A

[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Fonseca-etc\(ProfMat-MPT\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Fonseca-etc(ProfMat-MPT).doc) 26/4/2005

Investigação sobre As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática

Helena Fonseca, Lina Brunheira, João Pedro da Ponte
Departamento de Educação, F.C.U.L.

1. Introdução

Nesta conferência pretendemos dar a conhecer o trabalho realizado pelo Projecto Matemática para Todos — Investigações na Sala de Aula, que se desenvolveu no Centro de Investigação em Educação da FCUL durante cinco anos (de 1995 a 1999) e envolveu cerca de duas dezenas de docentes dos ensinos básico, secundário e superior.

O objectivo principal do projecto era o de estudar a realização de investigações matemáticas por parte dos alunos de diversos níveis de ensino, em termos da dinâmica da aula, das competências dos professores, das implicações curriculares e do desenvolvimento dos respectivos materiais de suporte. Não vamos, no entanto, fazer uma lista pormenorizada de actividades, resultados e conclusões, matéria que cabe melhor num relatório do que numa apresentação deste tipo¹. Vamos, isso sim, procurar evidenciar alguns aspectos que nos parecem particularmente importantes para os professores interessados na realização de investigações matemáticas com os seus alunos.

Para isso, começaremos por discutir o papel do trabalho de investigação em Matemática, recorrendo, em especial, aos testemunhos de grandes matemáticos. Procuraremos abordar questões como: O que é, realmente investigar em Matemática? Qual o papel da investigação na construção do conhecimento matemático? A realização de trabalho investigativo está ao alcance dos alunos? Quais as razões da sua importância em termos educativos?

Em segundo lugar abordaremos a dinâmica da aula onde os alunos realizam trabalho investigativo. O que há de específico numa aula dedicada a este tipo de trabalho? Quais as principais fases em que se desenrola? Quais os aspectos a que o professor deve dar especial atenção?

Alargando o âmbito da nossa discussão, abordamos, em terceiro lugar, o que é necessário fazer em termos de preparação deste tipo de aula, por parte do professor. Que decisões é preciso tomar? Como escolher as tarefas a propor aos alunos? Como organizar o seu trabalho, de modo a garantir as melhores condições de sucesso?

Para preparar da melhor maneira as aulas de investigação que procura levar a cabo, o professor deve igualmente reflectir sobre as experiências que vai realizando neste domínio, o que constitui o quarto tópico da nossa apresentação. Que aspectos deve o professor ter em conta na reflexão que faz sobre as suas experiências?

Finalmente, no último ponto discutimos algumas condições de natureza geral, que dizem respeito não só ao professor individual, mas a grupos de pesquisa e equipas de projecto, cuja constituição será certamente essencial para que este tipo de trabalho se possa generalizar nas nossas escolas. Procuraremos analisar, então, o que podem ser projectos educativos neste domínio e de que modo podem contribuir para uma efectiva renovação das práticas pedagógicas nas escolas.

Deste modo, num primeiro momento procuramos responder à questão: PORQUÊ? Num segundo momento, abordamos a questão: COMO? Tratamos esta questão a diversos níveis, começando pela prática lectiva, passando ao trabalho de preparação e reflexão sobre as aulas e considerando, por fim, o contexto institucional de trabalho do professor.

2. Investigações matemáticas, porquê?

2.1 A Matemática e a actividade matemática

A Matemática é frequentemente encarada como uma ciência exacta, pura, constituindo um corpo de conhecimentos construído dedutiva e cumulativamente, com rigor absoluto. Porém, diversos educadores matemáticos têm vindo a defender que é necessário ter em conta a prática dos matemáticos e olhar para a Matemática principalmente como uma actividade humana. Ou seja, para compreender a verdadeira natureza da Matemática é importante analisá-la numa perspectiva dinâmica, procurando compreender a forma como ela é construída e como evolui. Como afirmou Pólya “a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... a Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva” (1957, p. vii).

Mais ainda, o processo de construção da Matemática desvenda-nos o seu carácter falível, o qual Lakatos se atreveu a sublinhar. Para este filósofo, com formação de base em Matemática e Física,

A Matemática, tal como as ciências naturais, é falível e não indubitável; também ela se desenvolve pela crítica e correcção de teorias, que nunca estão livres de ambiguidades ou da possibilidade de erro ou engano. Partindo de um problema ou de uma conjectura, existe uma pesquisa simultânea de demonstrações e contra-exemplos. Novas demonstrações explicam contra-exemplos antigos e novos contra-exemplos ameaçam demonstrações antigas (Davis & Hersh, 1985, p. 324).

Nesta reflexão de Lakatos, encontramos também reconhecida a importância que os problemas desempenham na evolução da Matemática e que é também corroborada por matemáticos e educadores. Como afirma o matemático Ian Stewart “os problemas são a força motriz da Matemática [...] um bom problema é aquele cuja solução, em vez de conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos...” (1995, p. 17). Andrew Wiles, o famoso matemático que descobriu a demonstração do Teorema de Fermat, vai ainda mais longe. Segundo ele “é bom trabalhar em qualquer problema contanto que ele gere Matemática interessante durante o caminho mesmo se não o resolvermos no final” (Singh, 1998, p. 184).

Este matemático, que protagonizou uma das histórias mais fascinantes da Matemática contemporânea, conta como o seu contacto com as investigações, ainda em criança, foi decisivo:

Desde que pela primeira vez encontrei o Último Teorema de Fermat, em criança, ele tem sido a minha maior paixão... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria dos Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo. Para começar, parti da hipótese de que Fermat não conhecia muito mais Matemática do que a que eu aprendera. (Singh, 1998, p. 93)

Naturalmente que Wiles é um caso extremo: provou um teorema que tinha desafiado os matemáticos durante 350 anos. Mas este testemunho encerra dois aspectos significativos. Por um lado, existiu alguém que teve um certo papel na sua história: o seu professor de Matemática. Este concedeu atenção ao interesse do aluno por este tema, às investigações que o fascinavam, e acalentou-o. Por outro lado, mostra, mais uma vez, a influência motivadora que os bons problemas podem ter.

Mas se é indiscutível o interesse dos problemas para os matemáticos, é necessário compreender também qual o seu alcance educativo. Ou seja, será possível estabelecer um paralelo entre a actividade do matemático e a actividade do aluno na aula de Matemática? Obviamente que os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua actividade são em dimensão incomparáveis com os do aluno. No entanto, a actividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza. Hadamard (1945) refere, por exemplo, que a análise do trabalho de um aluno que resolve um problema pode revelar apenas a existência de “uma diferença de grau, uma diferença de nível” (p. 104) em relação ao trabalho de invenção do matemático. Esta proximidade é também defendida por Ernest (1991), para quem a actividade de resolução e formulação de problemas pelo aluno tem um paralelo na actividade do matemático profissional desde que seja produtiva: “qualitativamente não diferem” (p. 283). Por “produtiva”

este autor entende aquela Matemática que é criativa, por oposição à Matemática não-produtiva. A temática da resolução de problemas é, pois, determinante para compreender até que ponto é possível aproximar o trabalho do aluno na disciplina de Matemática da actividade matemática.

2.2. Resolução de problemas e investigações, de que falamos afinal?

O tema da resolução de problemas tem tido, desde o início da década de 80, uma atenção particular na Educação Matemática. Para isso contribuíram, especialmente, as ideias de Pólya. Segundo ele, o desenvolvimento pelos alunos da capacidade de resolução de problemas matemáticos deveria ser um dos objectivos principais do ensino da Matemática (no ensino secundário). O pensamento matemático que os alunos devem desenvolver na escola é constituído não só por raciocínio rigoroso ou formal mas também por processos informais, entre outros: “generalizar a partir da observação de casos, argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta” (1962/81, II, p. 101).

Pólya (1962/81) procurou também descortinar o significado de problema, num sentido amplo, fazendo distinção entre o problema em si e o processo de resolução. Uma pessoa tem um problema quando procura “conscientemente uma certa acção apropriada para obter um objectivo claramente concebido mas não atingível de maneira imediata.” (vol. I, p. 117). Ao realizar essa acção deu-se a resolução do problema. Inerente ao conceito de problema é a noção de dificuldade — sem esta não existe problema.

Esta noção de problema foi sendo progressivamente enriquecida por se considerar importante apresentar aos alunos não apenas problemas já perfeitamente formulados em contextos muito precisos. Muitas vezes, o processo de resolução pode implicar a exploração do contexto para além do que surge no enunciado, a formulação de questões alternativas. Uma perspectiva ainda mais ampla é dada por autores como John Mason (1996) e Alan Schoenfeld (1996) que, partindo da resolução de problemas, valorizam todo um conjunto de processos característicos da actividade matemática como formular, testar e provar conjecturas e argumentar.

Chegamos assim às actividades de exploração e de investigação matemática. Uma investigação é uma viagem até ao desconhecido. A ideia pode ser ilustrada pela metáfora geográfica de Susan Pirie: “o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem e não o destino” (1987, p. 2). Assim, na resolução de problemas tal como é entendida inicialmente, o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objectivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

3. Investigações matemáticas, como?

3.1 A aula de investigação

De um modo geral, a estrutura de uma aula com investigações envolve as seguintes fases: introdução da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão (Christiansen e Walther, 1986). Em muitas aulas de tipo investigativo a que temos assistido, estas são de facto as fases que temos encontrado. Assim, vamos então recordar alguns momentos de uma aula com investigações de modo a ilustrar um pouco a análise de cada uma dessas fases. Trata-se de uma aula de duas horas, com uma turma do 5º ano, em que foi proposta aos alunos uma tarefa de investigação intitulada “Potências e Regularidades” e onde os alunos trabalharam em grupo.

Potências e Regularidadesⁱⁱ

1. O número 729 pode ser escrito como uma potência de base 3. Para o verificar basta escrever uma tabela com as sucessivas potências de 3:

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

a) Procura escrever como uma potência de base 2

$$64 =$$

$$128 =$$

$$200 =$$

$$256 =$$

$$1000 =$$

b) Que conjecturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2? E como potências de base 3?

2. Observa as seguintes potências de base 5:

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$$5^4 = 625$$

a) O último algarismo de cada uma destas potências é sempre 5. Será que isso também se verifica para as potências de 5 seguintes?

b) Investiga o que se passa com as potências de 6.

c) Investiga também as potências de 9 e as de 7.

A fase de introdução da tarefa é bastante importante pois tem uma dinâmica própria que poderá influenciar decisivamente o sucesso do trabalho, principalmente se os alunos não estiverem familiarizados com este tipo de actividade. Nesta fase de arranque é determinante o modo de apresentação da proposta de trabalho à turma. Pode optar-se pela distribuição do enunciado escrito acompanhado por uma pequena apresentação oral que pretenderá, por um lado, clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações e, por outro, criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Pode ser feita uma leitura em grande grupo, pensando principalmente em alunos mais novos, acompanhada por alguns comentários que o professor considere mais pertinentes, ou por algumas questões cujas respostas revelem se os alunos estão, ou não, a entender o que lhes é proposto. Pode-se, simplesmente, apresentar a tarefa por escrito, sem que se faça uma discussão inicial do enunciado. Isto poderá implicar um maior apoio do professor junto dos grupos no sentido de os ajudar a entender o que se pretende. No entanto, se a apresentação escrita da tarefa estiver o mais clara possível este apoio poderá ser minimizado e os alunos poderão iniciar a exploração mais autonomamente. O aumento da experiência neste tipo de trabalho leva a que os alunos criem progressivamente uma maior independência em relação ao professor e percebam mais facilmente o que lhes é pedido. Em alguns casos, a tarefa pode ser proposta apenas oralmente, sem nenhum suporte escrito, podendo o professor, eventualmente, ir registando no quadro algumas informações essenciais. Finalmente, podemos pensar ainda no caso da introdução da proposta de trabalho não ser preparada previamente pelo professor, surgindo a tarefa, espontaneamente, na aula a partir da actividade dos alunos.

Na aula a que nos referimos anteriormente, a professora optou por apresentar a tarefa oralmente e por escrito. Como se tratavam de alunos sem experiência de trabalho de cunho investigativo, começou por ler as questões propostas na ficha, explicou o significado de algumas palavras (por exemplo, a palavra *conjectura*, mas que não ficou completamente percebida nesta altura) e formulou algumas

questões tais como: *Qual o significado da palavra cubo?* tendo sempre em conta a preocupação de não dar informação a mais nem a menos.

Na fase de desenvolvimento do trabalho pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na actividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa. Durante esta fase, o professor tem um papel de orientador da actividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalho dos alunos e do tipo de apoio que presta no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. Ao longo de toda esta fase o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que é alvo. Segundo o NCTM (1994), o professor deve colocar regularmente a pergunta “porquê” a seguir aos comentários dos alunos, de modo a “provocar o raciocínio”, levando-os a analisar e reflectir sobre o seu trabalho e a procurar significado para as suas descobertas. Nesta linha, podemos identificar outras questões com que o professor também deve desafiar os alunos: Como explicam isso? Qual a relação entre essas ideias? Porque é que dizes que não poderá ser...?

Na altura do arranque do trabalho, os alunos podem mostrar dificuldades que os impedem de realizar as suas investigações. Geralmente, quando estão pouco habituados ao trabalho de natureza investigativa, chamam rapidamente o professor, dizendo que não sabem o que é para fazer, pois não vislumbram nenhuma resposta imediata. Isto acontece porque não compreendem a natureza da tarefa proposta, cabendo aqui ao professor explicar-lhes um pouco do que é o trabalho investigativo e concretizar isso através de um ou outro exemplo.

O processo investigativo, em que os alunos se envolvem durante a fase de desenvolvimento da tarefa, compreende diversas etapas fundamentais. Primeiramente, tentam compreender a situação proposta, organizam os dados e formulam questões. Depois, fazem conjecturas, procuram testá-las e, em alguns casos, demonstrá-las.

No caso dos alunos mostrarem dificuldades em organizar os dados e em formular questões, e sendo isto determinante para o prosseguimento da investigação, o professor deverá apoiá-los. Para levá-los a descobrir o que têm a fazer deve colocar-lhes questões mais ou menos indirectas consoante o seu grau de familiaridade com este tipo de tarefas. Poderá, por exemplo, colocar questões relativas àquilo que eles já fizeram, dizer que analisem atentamente um conjunto de dados já obtidos, sugerir que organizem esses mesmos dados de outra maneira... Na tarefa “Potências e Regularidades”, depois de desafiar os alunos a escreverem alguns números previamente dados como uma potência de base 2, era pedido que fizessem conjecturas acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2 e como potências de base 3. Os alunos começaram por não perceber bem o que era pedido e deram algumas respostas sem sentido, ou tentaram responder com base em tarefas semelhantes já realizadas anteriormente. A professora tentou então ajudá-los do seguinte modo: disse para lerem novamente a proposta de trabalho e perguntou-lhes directamente o que era pedido; tentou que percebessem que eles é que tinham de fazer descobertas observando com atenção os resultados que tinham obtido; explicou indirectamente o termo “conjectura” através de questões como *O que te parece que vai acontecer? Será que é mesmo assim?* Passado algum tempo, começaram a perceber o que se pretendia, a entusiasmar-se com a actividade e a formular conjecturas pertinentes sobre as propriedades dos últimos algarismos das potências de diversas bases.

Muitas vezes as solicitações feitas pelos alunos ao professor vão no sentido de validar os seus processos ou ideias. Como resposta o professor não deverá emitir opiniões muito concretas mas sim incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Outras vezes, sendo o confronto de opiniões essencial neste tipo de actividade, o professor deve levar cada aluno a explicar e argumentar a favor do seu ponto de vista colocando questões como *O que te leva a pensar isso?* ou *Porque não concordas com a ideia do teu colega?* Este tipo de atitude fomenta a interacção entre os alunos, que vão aprendendo a discutir, a descobrir novas relações entre conceitos, a ter mais segurança nas suas ideias matemáticas e a desenvolver o raciocínio e a criatividade.

Durante o trabalho investigativo, os alunos poderão seguir por caminhos através dos quais não serão bem sucedidos. Nesta situação, o professor deverá evitar dizer-lhes imediatamente que seguem um caminho infrutífero e dar algum tempo para que seja a sua própria experiência a mostrar-lhes o erro. No entanto, tem de ter cuidado para que essa exploração mal conduzida não se prolongue demasiado e

não acabe por lhes provocar desmotivação. Assim, por vezes é necessário que o professor avance com pistas mais directas para um caminho possível a seguir na exploração da tarefa, lembrando, por exemplo, situações já exploradas anteriormente e cujas estratégias poderão ser análogas às que os alunos poderão implementar.

Algumas vezes, o aluno também pode seguir por caminhos que o professor nunca tinha pensado e que levam ao aparecimento de resultados inesperados. Assim, o professor precisa de estar atento a essas descobertas e disponível para perceber e dar continuidade a esses caminhos.

Durante a fase de discussão o professor, na sua função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos. Nesta fase os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas. É também esta a altura adequada para se clarificarem ideias, se sistematizarem algumas conclusões e se validarem resultados.

Ao organizar a fase de discussão o professor deve conhecer bem o trabalho dos alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas (Mason, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998). A altura para realizar esta discussão pode ser variável. O ideal é fazê-la logo após a exploração da tarefa, mas muitas vezes isso não é possível devido ao horário espartilhado dos alunos. Frequentemente o que acontece é que o desenvolvimento da actividade de investigação decorre numa aula e a discussão apenas na aula seguinte, o que dificulta o arranque da discussão final, pois os alunos, de uma aula para a outra, já não se lembram tão bem daquilo que fizeram e, de uma maneira geral, os registos escritos não são suficientemente ricos para os ajudar. Seria conveniente realizar o trabalho com investigações em aulas de duas horas, pois isso permitiria que a fase de discussão tivesse lugar na segunda hora, ou em parte dela. Por vezes, pode ser útil proporcionar um momento de discussão durante a realização da tarefa com o objectivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas do trabalho, ou mesmo de enriquecer a investigação. Na fase da discussão da aula apresentada anteriormente, e por questões de tempo, a professora optou por fazer uma pequena discussão final sobre as questões 1 e 2 e deixar a exploração e discussão da questão 3 para a aula seguinte. Inicialmente os alunos não estavam muito atentos ao que os colegas diziam, mas esta situação foi melhorando. A pouco e pouco os grupos manifestaram uma vontade crescente em intervir, chegando a querer falar todos ao mesmo tempo. Quando a base é 2Δ foram apresentadas diversas conjecturas (*termina sempre em 4, 8, 6 e 2*), a professora encorajou os alunos a apresentar argumentos em defesa das suas afirmações (*o Daniel vai voltar a explicar*), confrontou-os com as opiniões dos colegas (*Estão de acordo com o Álvaro?... Porquê?*)...

A discussão final sobre a actividade dos alunos é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho, sabendo que esta é um elemento indispensável numa aula de investigação. Como referem Bishop e Goffree (1986) a aprendizagem não resulta simplesmente da actividade, mas sim da reflexão sobre a actividade. Deste modo, é fundamental, proporcionar aos alunos momentos onde possam pensar e sobretudo reflectir sobre a actividade realizada. Por um lado esta reflexão permite, por exemplo, valorizar os processos de resolução em relação aos produtos, mesmo que estes não conduzam a uma resposta final correcta, criando nos alunos uma visão mais verdadeira da Matemática. Por outro, permite estabelecer conexões com outras ideias matemáticas, com questões extra-matemáticas e pode constituir um ponto de partida para outras investigações.

3.2 A preparação de aulas de investigação

Para que a realização de actividades de investigação na aula de Matemática constitua realmente um momento de aprendizagem significativa para os alunos, torna-se necessário que o professor invista bastante na preparação dessas aulas. Efectivamente, a variedade de processos em que os alunos se podem envolver, bem como o seu grau de complexidade e até de imprevisibilidade, exigem do professor uma preparação cuidada que vai para além da tarefa que propõe aos alunos. Ou seja, torna-se também necessária uma atitude por parte do professor que deve ser, também ela, de carácter investigativo e uma reflexão sobre os objectivos que se pretendem atingir com a realização de actividades de investigação.

Cabe, assim, ao professor participar activamente na elaboração do currículo, delineando objectivos, metodologias e estratégias, e reformulando-os em função da sua reflexão sobre a prática (Ponte et al., 1998). Ele precisa de decidir aspectos como:

- Qual o peso relativo a atribuir às actividades de investigação? Devem elas constituir-se como um eixo condutor do trabalho com os alunos, estão a par com outras actividades ou, pelo contrário, assumem um peso menor no currículo?
- Como se relacionam as investigações com os conteúdos a serem leccionados? Estes devem estar na sua base, ou a sua presença tem uma importância secundária? Os conteúdos podem surgir a partir da actividade ou esta deverá ser realizada depois de serem tratados?

A preparação das aulas de investigação propriamente ditas constitui outra fase importante. Em primeiro lugar há que seleccionar, adaptar ou mesmo construir a tarefa, o que deve ter em conta vários aspectos. Por um lado, para que a tarefa possa realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos. Para isso o professor tem necessidade de fazer uma pesquisa em torno de vários materiais que podem variar entre manuais escolares, livros com propostas de problemas e investigações e, mais recentemente, o mundo da Internet. Mas mais do que esta pesquisa, ele precisará de recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objectivos. Por outro lado, esta escolha está também dependente dos alunos que a irão trabalhar, devendo o professor ter em conta o seu nível etário, o seu desenvolvimento matemático, a familiaridade que têm com o trabalho investigativo, os seus interesses, etc.

Além de preparar a tarefa, é necessário pensar na estrutura das aulas, por exemplo, no modo de trabalho dos alunos. É muito habitual neste tipo de actividade organizar os alunos em pequeno grupo, mas cabe ao professor decidir se a realização da tarefa poderá constituir uma oportunidade para trabalho individual, em pequeno grupo ou mesmo no grupo-turma. Para além da organização dos alunos, deve ser considerada a realização de diferentes momentos durante as aulas, bem como a respectiva gestão do tempo. A realização de aulas de investigação comporta, como vimos, três fases distintas a introdução da tarefa, a sua realização pelos alunos e a discussão/reflexão conjunta. No entanto, mesmo a adopção desta perspectiva requer muitas outras decisões: A introdução deverá ser breve, mencionando apenas aspectos de gestão do trabalho da turma, ou poderá conter uma exploração inicial da tarefa? Na fase de realização, que questões ou dicas poderão ajudar os alunos? Durante a discussão, como promover a participação dos vários alunos?

Outra opção a tomar é relativa à utilização de materiais. Se é verdade que em alguns casos bastam o enunciado da tarefa e material de escrita, é também verdade que a utilização de recursos, como *software* dinâmico de Geometria (caso do Cabri ou GSP) ou *software* de cálculo simbólico (como o DERIVE) proporciona a realização de investigações bastante interessantes que, de outro modo se tornariam difíceis ou mesmo impossíveis de realizar.

Estas são algumas das questões a que o professor deve atender na preparação das aulas de investigação. A importância desta fase é tanto maior quanto menor for a experiência do professor na realização de trabalho investigativo, pois ela constitui um reforço bastante significativo para a segurança que sente no seu desempenho, durante estas aulas. Contudo, é preciso não esquecer que esta é apenas uma base de trabalho e que o professor deve estar preparado para alterar a sua agenda consoante o rumo dos acontecimentos, sendo que a capacidade de reflexão na acção é aqui particularmente importante.

3.3 Reflectir sobre o trabalho realizado

Se a preparação das aulas de investigação constitui um momento necessário, não menos importante é a reflexão sobre o trabalho realizado. Nela cabem essencialmente duas avaliações:

- Uma avaliação sobre a forma como decorreram as aulas e que conduz a questões como: A tarefa mostrou-se adequada aos objectivos iniciais? Os materiais e recursos utilizados foram úteis? A organização dos alunos foi pertinente? Deve ser alterada? A introdução da tarefa foi suficiente? A gestão do tempo foi boa? Que dificuldades foram sentidas?...

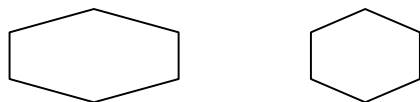
- Uma avaliação (ainda que informal) sobre o trabalho e a aprendizagem dos alunos e que se debruce sobre questões como: De que forma reagiram os alunos à tarefa? Como está a evoluir a sua relação com as investigações? Em que tipo de processos (questionar, conjecturar, testar, provar...) demonstram maior facilidade ou dificuldade? Como se está a desenvolver a sua capacidade de expressar ideias matemáticas (oralmente ou por escrito)?

Esta reflexão torna-se bastante importante por várias razões. Por um lado, ela informa o professor sobre o trabalho futuro sugerindo o reforço, manutenção ou diminuição deste tipo de trabalho, apontando estratégias mais apropriadas para a sua realização, alertando para obstáculos ou condições facilitadoras a ter em conta. Por outro lado, a reflexão constitui-se também como um momento de aprendizagem do professor sobre outras formas que possibilitem o melhor desempenho do seu papel, atendendo também a um maior conhecimento que vai construindo sobre os seus alunos, sobre as actividades de investigação e sobre a relação destas com a aprendizagem dos alunos.

Algumas situações concretas ajudam-nos a perceber a importância desta reflexão. Consideremos a tarefa “Poliedros” proposta a uma turma de 10º ano, no âmbito do estudo da Geometria.

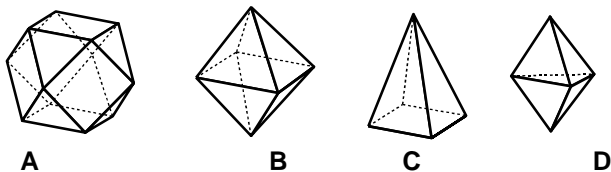
Poliedros

Observa os dois polígonos seguintes:



Ambos são hexágonos. Mas do da direita dizemos que é **regular**, porque tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos também congruentes. O da esquerda apenas tem os lados congruentes, e não os ângulos internos. Por isso Euclides, um matemático grego que viveu há 2300 anos, dizia, em vez de polígono regular, polígono equilátero (lados iguais) e equiângulo (ângulos iguais).

No espaço existem, além dos polígonos, poliedros. Observa com atenção os quatro poliedros seguintes e tenta ver como poderíamos aplicar também a palavra **regular** aos poliedros.



Observa os tipos de vértices e de faces que têm estes poliedros e vê se poderíamos chamar a algum deles regular. Explica a tua ideia. Diz depois qual seria a tua definição de poliedro regular.

A partir da análise de alguns poliedros, os alunos deveriam chegar a uma definição de poliedro regular por analogia com a definição de polígono regular no plano. Naturalmente, surgiram algumas dificuldades. Para além dos problemas com a terminologia adequada (que não são muito relevantes), uma das principais questões é perceber o que equivale, no espaço, ao lado nos polígonos. Outra questão que surge é derivada do facto da igualdade de ângulos no plano se confundir com a igualdade de amplitudes. Ora no espaço não há equivalente para isto, não tem sentido falar de amplitude de um ângulo sólido. Uma aluna teve a intuição de que seria preciso somar os ângulos das faces que concorrem no mesmo vértice, ideia que já Descartes tinha tido mas que, neste caso, não resolve.

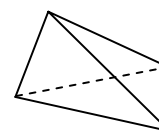
Depois de algum trabalho, os alunos acabaram por formular condições como:

- as faces devem ser todas iguais;
- as faces devem ser polígonos regulares;

- os vértices devem ser congruentes;
- ...

Durante a discussão, levantou-se a questão sobre a necessidade de enunciar todas as condições. Em particular, um aluno formulou a questão: *se as faces forem todas iguais e os vértices congruentes, as faces não serão necessariamente polígonos regulares?* Ora esta questão, absolutamente pertinente, não teve resposta imediata por parte da professora. De facto, todos os poliedros que conhecia com as faces iguais e os vértices congruentes, tinham também as faces regulares. Agora estava ela própria diante de um novo problema.

Resolveu então dedicar-se a ele em casa, pediu ajuda a um colega e encontraram um poliedro chamado disfenóide que satisfaz as duas primeiras condições sem satisfazer a última.



Disfenóide

A resposta foi encontrada: é necessário enunciar as três condições para termos um poliedro regular. Mas, mais do que isso, este exemplo alertou a professora para o interesse de discutir esta questão com os alunos e, para isso, considerou pertinente, no futuro, passar a incluir o caso do disfenóide entre os poliedros inicialmente apresentados na tarefa.

Esta história ilustra assim a importância do professor reflectir sobre os acontecimentos da sua aula. Essa reflexão ajuda-o a perceber o alcance do trabalho que desenvolve com os seus alunos, os problemas que levanta e de que forma podem ser ultrapassados. Ajuda-o a ter uma imagem mais completa daquilo que os alunos sabem e são capazes e, sobretudo, de que forma pode potenciar o desenvolvimento desses conhecimentos e capacidades.

3.4 Investigar sobre a prática

A realização de investigações por parte dos alunos não deve ser, na nossa perspectiva, uma actividade esporádica — pelo contrário, deve ser uma actividade frequente e regular na sala de aula. Para que isso aconteça é importante que os professores concebam projectos de trabalho nas suas escolas onde a actividade investigativa possa assumir uma presença importante. Na verdade, são muitos os obstáculos que se levantam à prática regular deste tipo de actividades, tornando-se extremamente penoso para o professor defrontá-los isoladamente.

Alguns dos obstáculos estão directamente relacionados com o próprio professor e envolvem, por exemplo, (i) o seu conhecimento de certos tópicos, eventualmente mais reduzido, (ii) uma experiência pessoal limitada na realização de trabalho de cunho investigativo, (iii) algum receio relativamente às questões matemáticas e (iv) às questões de dinâmica da aula que podem emergir neste tipo de trabalho. Trata-se de questões que podem ser ultrapassadas pela experimentação controlada, pela reflexão continuada sobre as aulas realizadas, pelas trocas de experiências com outros colegas.

Outros obstáculos resultam de aspectos do contexto escolar onde o professor está inserido. As coisas são mais difíceis quando não existe uma cultura que valorize as actividades de investigação matemática, nomeadamente a nível do grupo disciplinar, quando há falta de espaços de trabalho, para os professores trocarem experiências entre si, quando há falta de livros e materiais com sugestões de tarefas, relatos de experiências e orientações curriculares, e quando a estrutura organizativa da escola é demasiado rígida (impedindo, por exemplo, a utilização de espaços e tempos mais flexíveis de trabalho do que as aulas de 50 minutos).

A cultura da escola pode ser um elemento fundamental para a criação de uma atmosfera de encorajamento à experimentação e inovação curricular. Mas uma cultura favorável a estes processos não se cria por decreto. Constrói-se, lentamente, pela prática colaborativa de professores empenhados em projectos inovadores comuns. Esses projectos podem assumir múltiplas vertentes, envolvendo a

programação de aulas e actividades a realizar com os alunos, a criação de espaços de trabalho propícios à realização de trabalho investigativo, a criação de bancos de recursos e materiais como livros, revistas, *dossier* com tarefas, listas de endereços de Internet dedicados ao tema das investigações e a temas relacionados com este tipo de trabalho.

A existência de materiais diversos, de qualidade e acessíveis aos professores é certamente um elemento importante para a generalização deste tipo de trabalho. Esses materiais podem incluir tarefas para os alunos dos diversos níveis de escolaridade, relatos de experiências, e documentos de orientação curricular. A nossa perspectiva é que muitos desses materiais podem ser produzidos e organizados nas escolas pelos professores. Deste modo, eles não serão simples consumidores de materiais produzidos por outros, mas podem desempenhar igualmente um papel extremamente importante na sua produção.

Do mesmo modo que a realização de investigações matemáticas constitui um poderoso meio de aprendizagem matemática para o aluno, a realização de investigações sobre a sua prática constitui um poderoso meio de desenvolvimento profissional e de formação para os professores. A realização de projectos de investigação, a nível da escola ou de pequenos grupos de professores, poderá ser um modo privilegiado para desenvolver nos professores os saberes necessários à realização de actividades de investigação.

Estes projectos podem assumir natureza muito diversa. Podem respeitar apenas o trabalho realizado na sala de aula ou articular trabalho realizado em vários espaços escolares e extra-escolares. Podem envolver actividades mais formais, com elaboração de relatórios escritos ou combinar aspectos formais e informais. Podem envolver a recolha de dados através de vídeos, observações directas dos alunos, questionários, bem como a análise dos relatórios por eles produzidos. Em qualquer caso, estes projectos, para assumirem um cunho verdadeiramente investigativo devem ter as características fundamentais que marcam a realização de qualquer investigação em qualquer domínio:

1. Uma **questão** (ou um conjunto de questões) bem definidas, para as quais se pretende obter uma resposta.
2. Uma **conjectura** (ou um conjunto de conjecturas), informada por experiência anterior e por princípios educativos sólidos, que indique as direcções de trabalho a prosseguir.
3. A realização de **testes** práticos, pondo à prova as conjecturas, através da realização de experiências na sala de aula e da recolha de dados indicando os respectivos resultados.
4. A **validação** dos resultados obtidos, através de uma análise de dados cuidadosa, da construção de uma argumentação que evidencie o alcance do trabalho feito e da respectiva divulgação.

4. Considerações finais

Indicámos, nesta conferência, as razões que justificam a realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, bem como os principais aspectos de que esse trabalho se pode revestir. Muitas das ideias apresentadas terão de ser objecto de mais experimentação e investigação. Mas uma coisa parece ser certa: A realização de trabalho de cunho investigativo, constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor. Continuar a procurar respostas para essas questões, na formação inicial, com professores em serviço, junto de alunos dos diversos níveis de ensino, constitui um desafio extremamente aliciante — e extremamente importante — para toda a comunidade de educação matemática portuguesa.

Referências

- Abrantes, P., Leal, L. C., & Ponte, J. P. (Eds.). (1996). *Investigar para aprender Matemática*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.

- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.
- Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.
- Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados, e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 73-88). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classrooms: A pack for teachers*. Oxford: University of Oxford, Department of Education Studies.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1962/81). *Mathematical discovery* (3ª edição, combinada). New York: John Wiley.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfírio, & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.
- Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Singh, S. (1998). *A solução do último teorema de Fermat*. Lisboa: Relógio d'Água Editores
- Stewart, I. (1995). *Os problemas da matemática*. Lisboa: Gradiva.

ⁱ Diversas actividades realizadas pelo projecto estão, de resto, descritas com bastante pormenor nos livros Abrantes, Leal e Ponte (1996) e Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999).

ⁱⁱ A tarefa completa pode ser encontrada no livro Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999).